Übersicht

Die Klassen P und NP
NP-Vollständige Probleme
Weitere NP-vollständige Probleme
Graphenprobleme
Das Problem des Handlungsreisenden
Ein Auswahlproblem

Erinnerung: Graphenprobleme in NP

Problem INDEPENDENT SET

Instanz:	Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es unabhängige Menge I mit $\lvert I \rvert \geq k$?

unabhängige Menge: $I \subseteq V$ mit $\{x, y\} \notin E$ für alle $x, y \in I$

Erinnerung: Graphenprobleme in NP

Problem Independent Set

Instanz:	Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es unabhängige Menge I mit $\lvert I \rvert \geq k$?

unabhängige Menge: $I \subseteq V$ mit $\{x, y\} \notin E$ für alle $x, y \in I$

Problem Vertex Cover

Instanz:	Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es vertex cover U mit $\lvert U \rvert \leq k$?

Vertex cover: $U \subseteq V$ mit $e \cap U \neq \emptyset$ für alle $e \in E$

NP-vollständige Graphenprobleme

Theorem

INDEPENDENT SET *ist NP-vollständig.*

Beweis: Durch Reduktion von 3-SAT.

NP-vollständige Graphenprobleme

Theorem

INDEPENDENT SET *ist NP-vollständig.*

Beweis: Durch Reduktion von 3-SAT.

Korollar

VERTEX COVER ist NP-vollständig.

Beweis: INDEPENDENT SET $\leq_P$ VERTEX COVER

Reduktion von INDEPENDENT SET auf VERTEX COVER

Lemma

INDEPENDENT SET $\leq_P$ VERTEX COVER

Reduktion von Independent Set auf Vertex Cover

Lemma

Independent Set $\leq_P$ Vertex Cover

Beweis: $I \subseteq V$ ist unabhängig gdw. $V \setminus I$ ein Vertex Cover ist.

Reduktion von INDEPENDENT SET auf VERTEX COVER

Lemma

INDEPENDENT SET $\leq_P$ VERTEX COVER

Beweis: $I \subseteq V$ ist unabhängig gdw. $V \setminus I$ ein Vertex Cover ist.

Also hat G eine unabhängige Menge der Größe k
gdw. G eine Vertex Cover der Größe $|V| - k$ hat.

Reduktion von Independent Set auf Vertex Cover

Lemma

Independent Set $\leq_P$ Vertex Cover

Beweis: $I \subseteq V$ ist unabhängig gdw. $V \setminus I$ ein Vertex Cover ist.

Also hat G eine unabhängige Menge der Größe k
gdw. G eine Vertex Cover der Größe $|V| - k$ hat.

$\rightsquigarrow$ $(G, k) \mapsto (G, |V| - k)$ ist polynomielle Reduktion von Independent Set auf Vertex Cover.

Reduktion von 3-SAT auf Independent Set

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Reduktion von 3-SAT auf Independent Set

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:

$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

Reduktion von 3-SAT auf Independent Set

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:

$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

- Knoten: $v_{i,j}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ und $j = 1, 2, 3$

Reduktion von 3-SAT auf Independent Set

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:

$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

- Knoten: $v_{i,j}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ und $j = 1, 2, 3$
- Dreieck $v_{i,1},\ v_{i,2},\ v_{i,3}$ für jedes i

Reduktion von 3-SAT auf INDEPENDENT SET

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:

$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

- Knoten: $v_{i,j}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ und $j = 1, 2, 3$
- Dreieck $v_{i,1},\ v_{i,2},\ v_{i,3}$ für jedes i
- Kanten $\{v_{i,j}, v_{i',j'}\}$ wenn $a_{i,j} = \neg a_{i',j'}$

Reduktion von 3-SAT auf Independent Set

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:

$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

- Knoten: $v_{i,j}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ und $j = 1, 2, 3$
- Dreieck $v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}$ für jedes i
- Kanten $\{v_{i,j}, v_{i',j'}\}$ wenn $a_{i,j} = \neg a_{i',j'}$

Es gilt:

- I mit $|I| = m$ $\rightsquigarrow$ α_I so dass $\alpha_I \models F$

Reduktion von 3-SAT auf INDEPENDENT SET

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:

$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

- Knoten: $v_{i,j}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ und $j = 1, 2, 3$
- Dreieck $v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}$ für jedes i
- Kanten $\{v_{i,j}, v_{i',j'}\}$ wenn $a_{i,j} = \neg a_{i',j'}$

Es gilt:

- I mit $|I| = m$ $\rightsquigarrow$ α_I so dass $\alpha_I \models F$
- α mit $\alpha \models F$ $\rightsquigarrow$ $I(\alpha)$ mit $|I(\alpha)| = m$

Hamilton-Kreise

Ein Hamilton-Kreis in $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ist ein geschlossener Weg

$$v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1 \qquad \text{mit } \{v_i, v_{i+1}\} \in E \text{ für alle } i \leq n$$

in dem jeder Knoten genau einmal vorkommt, also $\{v_1, \ldots, v_n\} = V$

Hamilton-Kreise

Ein Hamilton-Kreis in $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ist ein geschlossener Weg

$$v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} = v_1 \quad \text{mit } \{v_i, v_{i+1}\} \in E \text{ für alle } i \leq n$$

in dem jeder Knoten genau einmal vorkommt, also $\{v_1, \ldots, v_n\} = V$

Problem Hamilton-Kreis

Instanz:	Graph $G = (V, E)$
Frage:	Gibt es einen Hamilton-Kreis in G ?

Hamilton-Kreise

Ein Hamilton-Kreis in $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ist ein geschlossener Weg

$$v_1, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1 \quad \text{mit } \{v_i, v_{i+1}\} \in E \text{ für alle } i \leq n$$

in dem jeder Knoten genau einmal vorkommt, also $\{v_1, \dots, v_n\} = V$

Problem HAMILTON-KREIS

Instanz:	Graph $G = (V, E)$
Frage:	Gibt es einen Hamilton-Kreis in G ?

Problem GERICHTETER HAMILTON-KREIS

Instanz:	gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$
Frage:	Gibt es einen Hamilton-Kreis in G ?

NP-Vollständigkeit von Hamilton-Kreis

Satz

Hamilton-Kreis *ist NP-vollständig.*

NP-Vollständigkeit von HAMILTON-KREIS

Satz

HAMILTON-KREIS *ist NP-vollständig.*

Lemma

3-$SAT \leq_P$ GERICHTETER HAMILTON-KREIS

NP-Vollständigkeit von Hamilton-Kreis

Satz

Hamilton-Kreis *ist NP-vollständig.*

Lemma

3-*SAT* $\leq_P$ Gerichteter Hamilton-Kreis

Lemma

Gerichteter Hamilton-Kreis $\leq_P$ Hamilton-Kreis

Das Problem des Handlungsreisenden

Problem TSP

Instanz: $n \times n$-Matrix $D = \big(d(i,j)\big)$ mit $d(i,j) \in \mathbb{N}$, Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Permutation $p_1, \ldots, p_n$ mit $\sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}) + d(p_n, p_1) \leq k$.

Das Problem des Handlungsreisenden

Problem TSP

Instanz: $n \times n$-Matrix $D = \big(d(i,j)\big)$ mit $d(i,j) \in \mathbb{N}$, Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Permutation $p_1, \ldots, p_n$ mit $\sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}) + d(p_n, p_1) \leq k$.

Satz

TSP *ist NP-vollständig*

Das Problem des Handlungsreisenden

Problem TSP

Instanz: $n \times n$-Matrix $D = \big(d(i,j)\big)$ mit $d(i,j) \in \mathbb{N}$, Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Permutation $p_1, \ldots, p_n$ mit $\sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}) + d(p_n, p_1) \leq k$.

Satz

TSP *ist NP-vollständig*

Beweis: durch Reduktion von Hamilton-Kreis auf TSP.

Das Problem Subset Sum

Problem Subset Sum

Instanz: Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = t$?

Das Problem Subset Sum

Problem Subset Sum

Instanz:	Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = t$?

Theorem

Subset Sum *ist NP-vollständig.*

Das Problem Subset Sum

Problem Subset Sum

Instanz:	Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = t$?

Theorem

Subset Sum *ist NP-vollständig.*

Das Problem ist offensichtlich in NP.

Das Problem Subset Sum

Problem Subset Sum

Instanz:	Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = t$?

Theorem

Subset Sum *ist NP-vollständig.*

Das Problem ist offensichtlich in NP.

Wir zeigen: 3-SAT $\leq_P$ Subset Sum.

Reduktion von 3-SAT auf Subset Sum

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in 3-KNF,
in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

Reduktion von 3-SAT auf SUBSET SUM

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in 3-KNF, in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

Für $1 \leq i \leq n$:

$$a_i := 10^{m-1+i} + \sum_{x_i \in C_j} 10^{j-1}$$

$$b_i := 10^{m-1+i} + \sum_{\bar{x}_i \in C_j} 10^{j-1}$$

Reduktion von 3-SAT auf Subset Sum

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in 3-KNF,
in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

Für $1 \leq i \leq n$:

$$a_i := 10^{m-1+i} + \sum_{x_i \in C_j} 10^{j-1}$$

$$b_i := 10^{m-1+i} + \sum_{\bar{x}_i \in C_j} 10^{j-1}$$

Für $1 \leq j \leq m$:

$$c_j = d_j = 10^{j-1}$$

Reduktion von 3-SAT auf SUBSET SUM

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in 3-KNF, in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

Für $1 \leq i \leq n$:

$$a_i := 10^{m-1+i} + \sum_{x_i \in C_j} 10^{j-1}$$

$$b_i := 10^{m-1+i} + \sum_{\bar{x}_i \in C_j} 10^{j-1}$$

Für $1 \leq j \leq m$:

$$c_j = d_j = 10^{j-1}$$

$$t := \sum_{i=1}^{n} 10^{m-1+i} + \sum_{j=1}^{m} 3 \cdot 10^{j-1}$$

Reduktion von 3-SAT auf SUBSET SUM

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in 3-KNF,
in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

Für $1 \leq i \leq n$:

$$a_i := 10^{m-1+i} + \sum_{x_i \in C_j} 10^{j-1}$$

$$b_i := 10^{m-1+i} + \sum_{\bar{x}_i \in C_j} 10^{j-1}$$

Für $1 \leq j \leq m$:

$$c_j = d_j = 10^{j-1}$$

$$t := \sum_{i=1}^{n} 10^{m-1+i} + \sum_{j=1}^{m} 3 \cdot 10^{j-1}$$

Es gilt: Es gibt eine Teilmenge der Zahlen $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, $c_1, d_1, \ldots, c_m, d_m$ mit Summe t gdw. F erfüllbar ist.