Übersicht

Das Postsche Korrespondenzproblem

Eine Instanz des *PKP* ist eine Liste von Paaren aus $\Sigma^* \times \Sigma^*$:

$$(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$$

Eine Lösung ist eine Folge $i_1, \ldots, i_k$ von Indizes $1 \leq i_j \leq n$ mit

$$v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k} = w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}$$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Eine Instanz des *PKP* ist eine Liste von Paaren aus $\Sigma^* \times \Sigma^*$:

$$(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$$

Eine Lösung ist eine Folge $i_1, \ldots, i_k$ von Indizes $1 \leq i_j \leq n$ mit

$$v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k} = w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}$$

Das Postsche Korrespondenzproblem *PKP*:

Gegeben:	Eine Instanz des *PKP*.
Frage:	Gibt es eine Lösung?

Das Postsche Korrespondenzproblem

Eine Instanz des *PKP* ist eine Liste von Paaren aus $\Sigma^* \times \Sigma^*$:

$$(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$$

Eine Lösung ist eine Folge $i_1, \ldots, i_k$ von Indizes $1 \leq i_j \leq n$ mit

$$v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k} = w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}$$

Das Postsche Korrespondenzproblem *PKP*:

Gegeben:	Eine Instanz des *PKP*.
Frage:	Gibt es eine Lösung?

Dieses Problem *PKP* ist unentscheidbar!

Beweis der Unentscheidbarkeit

Das modifizierte Postsche Korrespondenzproblem *MPKP*:

Gegeben:	Eine Instanz des PKP.
Frage:	Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_k$ mit $i_1 = 1$?

Beweis der Unentscheidbarkeit

Das modifizierte Postsche Korrespondenzproblem *MPKP*:

Gegeben: Eine Instanz des PKP.

Frage: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_k$ mit $i_1 = 1$?

Lemma

$H \leq MPKP$

Beweis der Unentscheidbarkeit

Das modifizierte Postsche Korrespondenzproblem *MPKP*:

Gegeben: Eine Instanz des PKP.

Frage: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_k$ mit $i_1 = 1$?

Lemma

$H \leq MPKP$

Lemma

$MPKP \leq PKP$

Reduktion von MPKP auf PKP

Sei $(v_1, w_1), \dots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Reduktion von MPKP auf PKP

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Konstruiere daraus eine neue Instanz I'

$$(v_0', w_0'), (v_1', w_1'), \ldots, (v_n', w_n'), (v_{n+1}', w_{n+1}')$$

mit Alphabet $\Sigma \cup \{*, \$\}$.

Reduktion von MPKP auf PKP

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Konstruiere daraus eine neue Instanz I'

$$(v'_0, w'_0), (v'_1, w'_1), \ldots, (v'_n, w'_n), (v'_{n+1}, w'_{n+1})$$

mit Alphabet $\Sigma \cup \{*, \$\}$.

Ist $v_i = a_1 a_2 \ldots a_m$ und $w_i = b_1 b_2 \ldots b_\ell$, dann ist

$$v'_i = a_1 * a_2 * \ldots a_m *$$

$$w'_i = * b_1 * b_2 \ldots * b_\ell$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Reduktion von MPKP auf PKP

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Konstruiere daraus eine neue Instanz I'

$$(v_0', w_0'), (v_1', w_1'), \ldots, (v_n', w_n'), (v_{n+1}', w_{n+1}')$$

mit Alphabet $\Sigma \cup \{*, \$\}$.

Ist $v_i = a_1 a_2 \ldots a_m$ und $w_i = b_1 b_2 \ldots b_\ell$, dann ist

$$v_i' = a_1{*}a_2{*} \ldots a_m{*}$$

$$w_i' = {*}b_1{*}b_2 \ldots {*}b_\ell$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Ferner ist $v_0' = {*}v_1'$ und $w_0' = w_1'$,

sowie $v_{n+1}' = \$$ und $w_{n+1}' = {*}\$$.

Reduktion von MPKP auf PKP

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Konstruiere daraus eine neue Instanz I'

$$(v_0', w_0'), (v_1', w_1'), \ldots, (v_n', w_n'), (v_{n+1}', w_{n+1}')$$

mit Alphabet $\Sigma \cup \{*, \$\}$.

Ist $v_i = a_1 a_2 \ldots a_m$ und $w_i = b_1 b_2 \ldots b_\ell$, dann ist

$$v_i' = a_1{*}a_2{*} \ldots a_m{*}$$

$$w_i' = {*}b_1{*}b_2 \ldots {*}b_\ell$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Ferner ist $v_0' = {*}v_1'$ und $w_0' = w_1'$,

sowie $v_{n+1}' = \$$ und $w_{n+1}' = {*}\$$.

Dann gilt: I' hat eine Lösung gdw. I hat eine Lösung mit $i_1 = 1$.

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Box, \delta, q_0, F)$ eine DTM und $w \in \Sigma^*$.

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Box, \delta, q_0, F)$ eine DTM und $w \in \Sigma^*$.

Annahmen über M:

- $\delta(q, a)$ ist undefiniert gdw. $q \in F$

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Box, \delta, q_0, F)$ eine DTM und $w \in \Sigma^*$.

Annahmen über M:

- $\delta(q, a)$ ist undefiniert gdw. $q \in F$
- M schreibt kein Leerzeichen $\Box$

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Box, \delta, q_0, F)$ eine DTM und $w \in \Sigma^*$.

Annahmen über M:

- $\delta(q, a)$ ist undefiniert gdw. $q \in F$
- M schreibt kein Leerzeichen $\Box$

Wir konstruieren eine Instanz $I(M, w)$ des *MPKP*
mit Alphabet $\Gamma \cup Q \cup \{\#\}$, so dass:

$I(M, w)$ hat eine Lösung gdw. M hält bei Eingabe w

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung
$\#$	$\#q_0w\#$	das erste Paar

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung
$\#$	$\#q_0w\#$	das erste Paar
a	a	für $a \in \Gamma$
$\#$	$\#$	

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung
$\#$	$\#q_0w\#$	das erste Paar
a	a	für $a \in \Gamma$
$\#$	$\#$	
qa	bp	für $\delta(q, a) = (p, b, R)$
$qa\#$	$bp\Box\#$	"

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung
$\#$	$\#q_0w\#$	das erste Paar
a	a	für $a \in \Gamma$
$\#$	$\#$	
qa	bp	für $\delta(q, a) = (p, b, R)$
$qa\#$	$bp\Box\#$	"
cqa	pcb	für $\delta(q, a) = (p, b, L)$ und $c \in \Gamma$
$\#qa$	$\#p\Box b$	für $\delta(q, a) = (p, b, L)$

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung
$\#$	$\#q_0w\#$	das erste Paar
a	a	für $a \in \Gamma$
$\#$	$\#$	
qa	bp	für $\delta(q,a) = (p,b,R)$
$qa\#$	$bp\square\#$	"
cqa	pcb	für $\delta(q,a) = (p,b,L)$ und $c \in \Gamma$
$\#qa$	$\#p\square b$	für $\delta(q,a) = (p,b,L)$
qa	q	für $q \in F$ und $a \in \Gamma$
aq	q	"

Reduktion des Halteproblems auf *MPKP*

Die Instanz $I(M, w)$ enthält die folgenden Paare:

v_i	w_i	Erklärung
$\#$	$\#q_0w\#$	das erste Paar
a	a	für $a \in \Gamma$
$\#$	$\#$	
qa	bp	für $\delta(q, a) = (p, b, R)$
$qa\#$	$bp\Box\#$	"
cqa	pcb	für $\delta(q, a) = (p, b, L)$ und $c \in \Gamma$
$\#qa$	$\#p\Box b$	für $\delta(q, a) = (p, b, L)$
qa	q	für $q \in F$ und $a \in \Gamma$
aq	q	"
$q\#\#$	$\#$	für $q \in F$

Disjunktheit kontextfreier Sprachen

Das Disjunktheitsproblem *DISJ*:

Gegeben: Zwei kfG G_1 und G_2

Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Disjunktheit kontextfreier Sprachen

Das Disjunktheitsproblem *DISJ*:

Gegeben: Zwei kfG G_1 und G_2

Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Satz

Das Disjunktheitsproblem für kfG ist unentscheidbar.

Disjunktheit kontextfreier Sprachen

Das Disjunktheitsproblem *DISJ*:

Gegeben: Zwei kfG G_1 und G_2

Frage: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

Satz

Das Disjunktheitsproblem für kfG ist unentscheidbar.

Beweis: Durch Reduktion $PKP \leq DISJ$

Reduktion von *PKP* auf *DISJ*

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Reduktion von *PKP* auf *DISJ*

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Definiere zwei kfG mit Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{1, \ldots, n\}$,

$$G_1(I) = (\{A\}, \Sigma', P_1, A) \text{ und } L_1(I) = L(G_1(I))$$
$$G_2(I) = (\{B\}, \Sigma', P_2, B) \text{ und } L_2(I) = L(G_2(I))$$

Reduktion von *PKP* auf *DISJ*

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Definiere zwei kfG mit Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{1, \ldots, n\}$,

$$G_1(I) = (\{A\}, \Sigma', P_1, A) \text{ und } L_1(I) = L(G_1(I))$$
$$G_2(I) = (\{B\}, \Sigma', P_2, B) \text{ und } L_2(I) = L(G_2(I))$$

P_1 enthält Produktionen:

$$A \to v_i A\, i \quad \text{und} \quad A \to v_i\, i \quad \text{für } 1 \le i \le n$$

Reduktion von *PKP* auf *DISJ*

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Definiere zwei kfG mit Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{1, \ldots, n\}$,

$$G_1(I) = (\{A\}, \Sigma', P_1, A) \text{ und } L_1(I) = L(G_1(I))$$
$$G_2(I) = (\{B\}, \Sigma', P_2, B) \text{ und } L_2(I) = L(G_2(I))$$

P_1 enthält Produktionen:

$$A \to v_i A\, i \quad \text{und} \quad A \to v_i\, i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

P_2 enthält Produktionen:

$$B \to w_i B\, i \quad \text{und} \quad B \to w_i\, i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

Reduktion von *PKP* auf *DISJ*

Sei $(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)$ eine Instanz I des PKP mit Alphabet Σ.

Definiere zwei kfG mit Alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{1, \ldots, n\}$,

$$G_1(I) = (\{A\}, \Sigma', P_1, A) \text{ und } L_1(I) = L(G_1(I))$$
$$G_2(I) = (\{B\}, \Sigma', P_2, B) \text{ und } L_2(I) = L(G_2(I))$$

P_1 enthält Produktionen:

$$A \to v_i A\, i \quad \text{und} \quad A \to v_i\, i \quad \text{für } 1 \le i \le n$$

P_2 enthält Produktionen:

$$B \to w_i B\, i \quad \text{und} \quad B \to w_i\, i \quad \text{für } 1 \le i \le n$$

Dann gilt: $L_1(I) \cap L_2(I) \neq \emptyset$ genau dann, wenn I eine Lösung hat.

Mehrdeutigkeit

Definition: Eine kfG G ist eindeutig, wenn es für jedes Wort $w \in L(G)$ genau einen Ableitungsbaum gibt.

Sonst heißt G mehrdeutig.

Mehrdeutigkeit

Definition: Eine kfG G ist eindeutig, wenn es für jedes Wort $w \in L(G)$ genau einen Ableitungsbaum gibt.

Sonst heißt G mehrdeutig.

Satz

Das folgende Probem ist unentscheidbar:

Gegeben: *Eine kfG G*

Frage: *Ist G mehrdeutig?*

Weitere Probleme

Lemma

Auch die Sprachen $\overline{L_1(I)}$ und $\overline{L_2(I)}$ sind kontextfrei.

Weitere Probleme

Lemma

Auch die Sprachen $\overline{L_1(I)}$ und $\overline{L_2(I)}$ sind kontextfrei.

Seien G_1 und G_2 kfG, und R ein regulärer Ausdruck.

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

Weitere Probleme

Lemma

Auch die Sprachen $\overline{L_1(I)}$ und $\overline{L_2(I)}$ sind kontextfrei.

Seien G_1 und G_2 kfG, und R ein regulärer Ausdruck.

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

- Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Weitere Probleme

Lemma

Auch die Sprachen $\overline{L_1(I)}$ und $\overline{L_2(I)}$ sind kontextfrei.

Seien G_1 und G_2 kfG, und R ein regulärer Ausdruck.

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

- Ist $L(G_1) = L(G_2)$?
- Ist $L(G_1) = L(R)$?

Weitere Probleme

Lemma

Auch die Sprachen $\overline{L_1(I)}$ und $\overline{L_2(I)}$ sind kontextfrei.

Seien G_1 und G_2 kfG, und R ein regulärer Ausdruck.

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

- Ist $L(G_1) = L(G_2)$?
- Ist $L(G_1) = L(R)$?
- Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

Weitere Probleme

Lemma

Auch die Sprachen $\overline{L_1(I)}$ und $\overline{L_2(I)}$ sind kontextfrei.

Seien G_1 und G_2 kfG, und R ein regulärer Ausdruck.

Folgende Probleme sind unentscheidbar:

- Ist $L(G_1) = L(G_2)$?
- Ist $L(G_1) = L(R)$?
- Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?
- Ist $L(R) \subseteq L(G_1)$?