Aufgabe 12-1. Ein mögliche Regel für die Applikation ist

$$\text{(App)}\ \frac{\mathcal{W}(\Gamma, e_0) = (\theta_0, \tau_0) \qquad \mathcal{W}(\Gamma[\theta_0], e_1) = (\theta_1, \tau_1) \qquad \theta_2 = \mathcal{U}(\tau_0[\theta_1], \tau_1 \to \gamma) \text{ für eine neue Variable } \gamma}{\mathcal{W}(\Gamma, e_0\ e_1) = (\theta_0; \theta_1; \theta_2, \gamma[\theta_2])}$$

Dabei bedeutet $\theta_2 = \mathcal{U}(\tau_0, \tau_1 \to \gamma)$ dass θ_2 eine allgemeinstmögliche Einsetzung ist, die $\tau_0[\theta_2] = (\tau_1 \to \gamma)[\theta_2]$ wahr macht. Für γ muss eine bisher unbenutzte Variable gewählt werden.

Damit können wir nun $\mathcal{W}(\emptyset, \texttt{fun}\ f\ x \Rightarrow x\ (f\ x))$ berechnen. Schreibe dazu Γ als Abkürzung für $[f \mapsto (\alpha \to \beta), x \mapsto \alpha]$. Wenn wir weiterhin Π als Abkürzung für die Herleitung

$$\text{(App)}\ \frac{\text{(Var)}\ \dfrac{}{\mathcal{W}(\Gamma, f) = (\emptyset, \alpha \to \beta)} \qquad \text{(Var)}\ \dfrac{}{\mathcal{W}(\Gamma, x) = (\emptyset, \alpha)} \qquad [\gamma_1 \mapsto \beta] = \mathcal{U}(\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma_1)}{\mathcal{W}(\Gamma, f\ x) = ([\gamma_1 \mapsto \beta], \beta)}$$

schreiben, so ergibt sich die gewünschte Herleitung als:

$$\text{(Fun)}\ \frac{\text{(App)}\ \dfrac{\text{(Var)}\ \dfrac{}{\mathcal{W}(\Gamma, x) = (\emptyset, \alpha)} \qquad \Pi \qquad [\alpha \mapsto (\beta \to \gamma_2)] = \mathcal{U}(\alpha, \beta \to \gamma_2)}{\mathcal{W}(\Gamma, x\ (f\ x)) = ([\gamma_1 \mapsto \beta, \alpha \mapsto (\beta \to \gamma_2)], \gamma_2)} \qquad [\gamma_2 \mapsto \beta] = \mathcal{U}(\beta, \gamma_2)}{\mathcal{W}(\emptyset, \texttt{fun}\ f\ x \Rightarrow x\ (f\ x)) = ([\gamma_1 \mapsto \beta, \alpha \mapsto (\beta \to \beta), \gamma_2 \mapsto \beta], (\beta \to \beta) \to \beta)}$$