Übersicht

Endliche Automaten

Äquivalenz der Automatenmodelle
- Teilmengenkonstruktion
- Exponentieller Blow-up
- ϵ-Übergänge

Reguläre Ausdrücke

Pumping Lemma

Kontextfreie Sprachen

Pushdown-Automaten

Determinisierung

Ziel: für jeden NEA A gibt es einen äquivalenten DEA A_D

Determinisierung

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengenkonstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Ziel: für jeden NEA A gibt es einen äquivalenten DEA A_D

Idee:

- zu jedem Zeitpunkt Menge von möglichen Zuständen $S \subseteq Q$

Determinisierung

Ziel: für jeden NEA A gibt es einen äquivalenten DEA A_D

Idee:

- zu jedem Zeitpunkt Menge von möglichen Zuständen $S \subseteq Q$
- $|Q|$ endlich $\rightsquigarrow$ endlich viele Teilmengen

Determinisierung

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Ziel: für jeden NEA A gibt es einen äquivalenten DEA A_D

Idee:

- zu jedem Zeitpunkt Menge von möglichen Zuständen $S \subseteq Q$
- $|Q|$ endlich $\rightsquigarrow$ endlich viele Teilmengen
- für $S \subseteq Q$ und Eingabe a ist die Menge der möglichen Folgezustände eindeutig

Determinisierung

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Ziel: für jeden NEA A gibt es einen äquivalenten DEA A_D

Idee:

- zu jedem Zeitpunkt Menge von möglichen Zuständen $S \subseteq Q$
- $|Q|$ endlich $\rightsquigarrow$ endlich viele Teilmengen
- für $S \subseteq Q$ und Eingabe a ist die Menge der möglichen Folgezustände eindeutig

$\rightsquigarrow$ DEA A_D, dessen Zustände Teilmengen von Q sind

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA.

Theorie für MI

Endliche Automaten

Äquivalenz der Automatenmodelle

Teilmengen-konstruktion

Exponentieller Blow-up

ϵ-Übergänge

Reguläre Ausdrücke

Pumping Lemma

Kontextfreie Sprachen

Pushdown-Automaten

Teilmengenkonstruktion

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_N}$.

Teilmengenkonstruktion

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_N}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_N$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a)$$

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_N}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_N$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a)$$

- Anfangszustand ist $\{q_0\}$

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_N}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_N$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a)$$

- Anfangszustand ist $\{q_0\}$
- Endzustände in F_D sind Mengen S mit

$$S \cap F_N \neq \emptyset$$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beweis der Äquivalenz

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Theorem

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ *ein NEA,*

und $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ *der mit der Teilmengenkonstruktion gewonnene DEA.*

Dann ist $L(A_D) = L(A_N)$.

Beweis der Äquivalenz

Theorem

Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ *ein NEA,*

und $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ *der mit der Teilmengenkonstruktion gewonnene DEA.*

Dann ist $L(A_D) = L(A_N)$.

Lemma

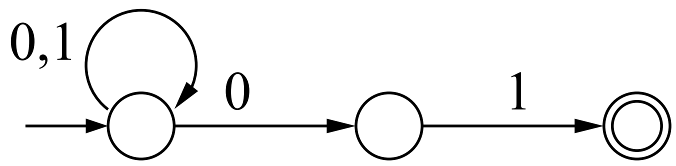
Seien A_N *und* A_D *wie oben. Es gilt für alle* $w \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

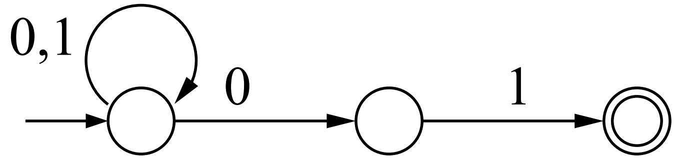
	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$



Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

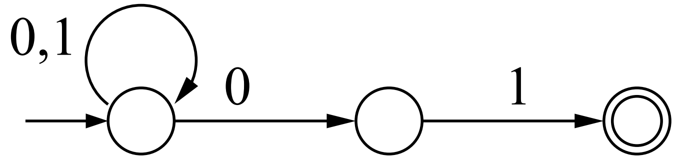


	0	1

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengenkonstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

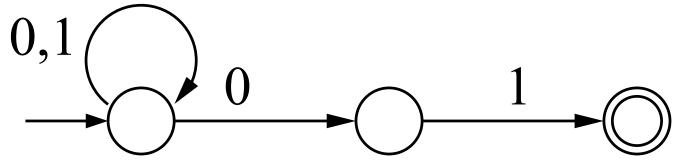
	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \ q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$



		0	1
	$\emptyset$		
$\rightarrow$	$\{q_0\}$		
	$\{q_1\}$		
	$\{q_2\}$		
	$\{q_0, q_1\}$		
	$\{q_0, q_2\}$		
	$\{q_1, q_2\}$		
	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Beispiel

		0	1
$\rightarrow$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

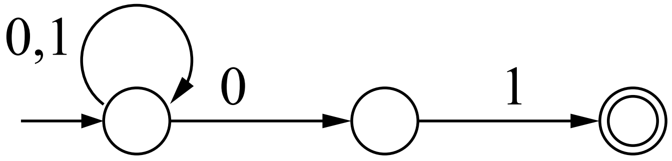


		0	1
	$\emptyset$		
$\rightarrow$	$\{q_0\}$		
	$\{q_1\}$		
$*$	$\{q_2\}$		
	$\{q_0, q_1\}$		
$*$	$\{q_0, q_2\}$		
$*$	$\{q_1, q_2\}$		
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengenkonstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

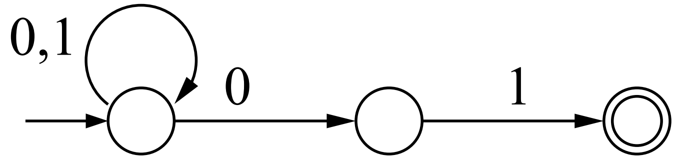
	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$



		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$		
	$\{q_1\}$		
$*$	$\{q_2\}$		
	$\{q_0, q_1\}$		
$*$	$\{q_0, q_2\}$		
$*$	$\{q_1, q_2\}$		
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Beispiel

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

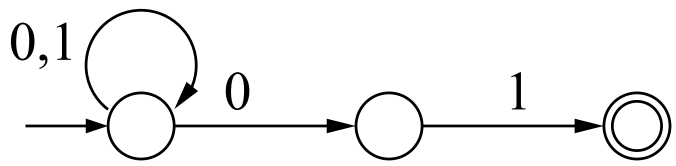


		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$		
$*$	$\{q_2\}$		
	$\{q_0, q_1\}$		
$*$	$\{q_0, q_2\}$		
$*$	$\{q_1, q_2\}$		
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

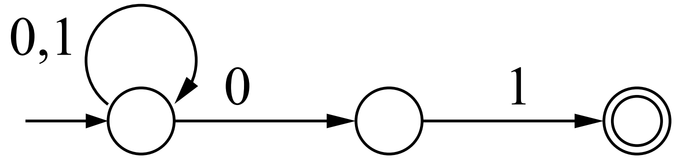


		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$		
$*$	$\{q_0, q_2\}$		
$*$	$\{q_1, q_2\}$		
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \ q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

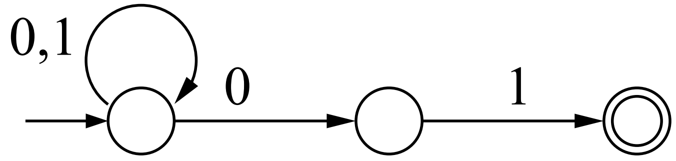


		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$		
$*$	$\{q_1, q_2\}$		
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

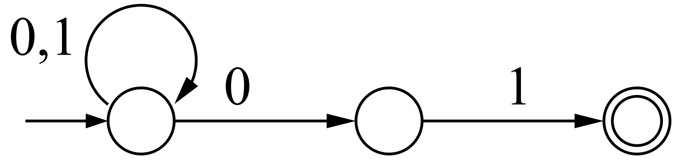
		0	1
$\rightarrow$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$



		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$		
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Beispiel

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

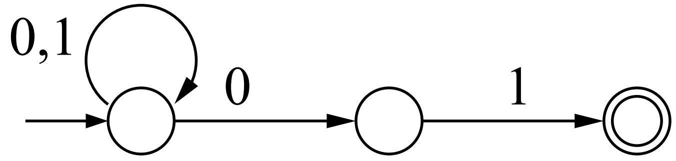


		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$		

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \; q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$



		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

$\leadsto$ Äquivalenter DEA:

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

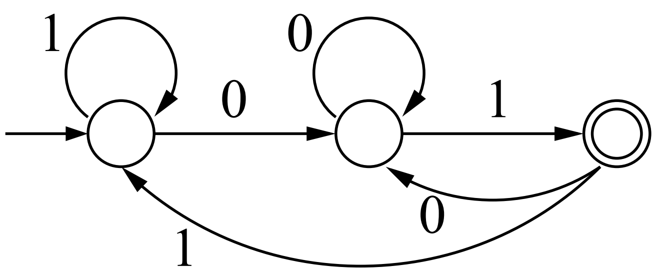
Erreichbarkeit

Automat D hat $|Q_D| = 2^{|Q_N|}$ Zustände.

Aber: Brauchen nur erreichbare Zustände:

		0	1
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

$\rightsquigarrow$ Äquivalenter DEA:



Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengenkonstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

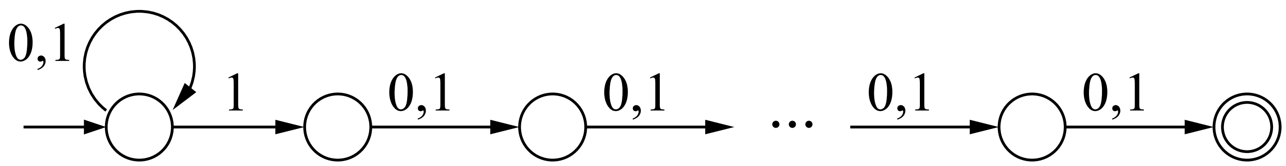
Exponentieller Blow-up

Sei $L_n := \{w\,;\, w = u1v \text{ mit } |v| = n-1\}$.

Exponentieller Blow-up

Sei $L_n := \{w\,;\, w = u1v \text{ mit } |v| = n-1\}$.

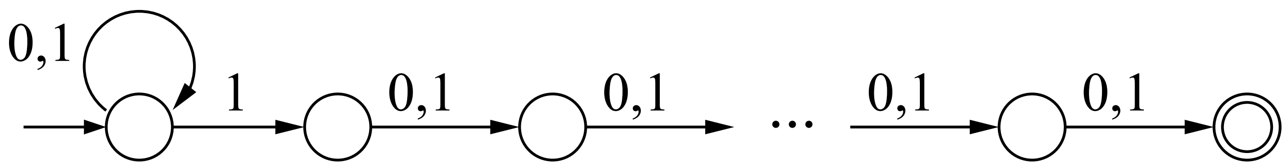
L_n wird erkannt durch NEA A_n mit $n+1$ Zuständen:



Exponentieller Blow-up

Sei $L_n := \{w\,;\, w = u1v \text{ mit } |v| = n-1\}$.

L_n wird erkannt durch NEA A_n mit $n+1$ Zuständen:



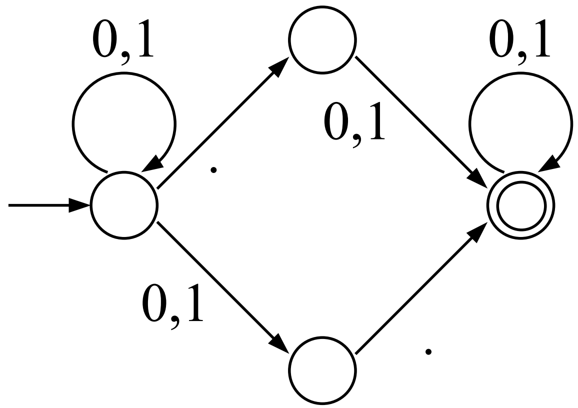
Theorem

Jeder DEA, der L_n erkennt, hat mindestens 2^n Zustände.

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Automaten mit ϵ-Übergängen

Motivierendes Beispiel:



Theorie für MI

Endliche Automaten

Äquivalenz der Automatenmodelle

Teilmengen-konstruktion

Exponentieller Blow-up

ϵ-Übergänge

Reguläre Ausdrücke

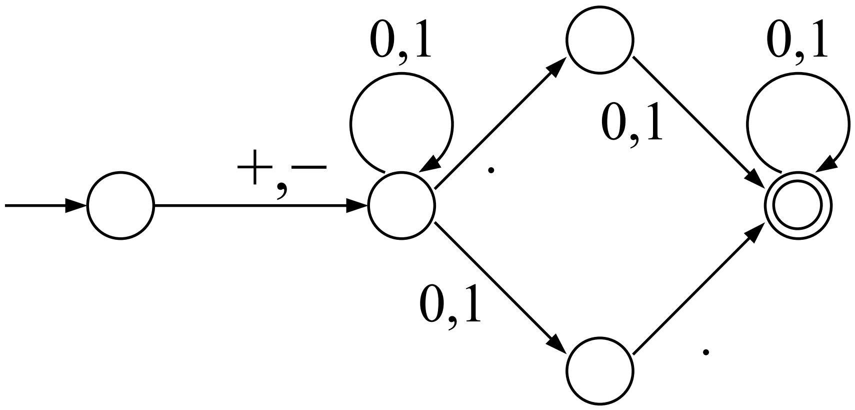
Pumping Lemma

Kontextfreie Sprachen

Pushdown-Automaten

Automaten mit ϵ-Übergängen

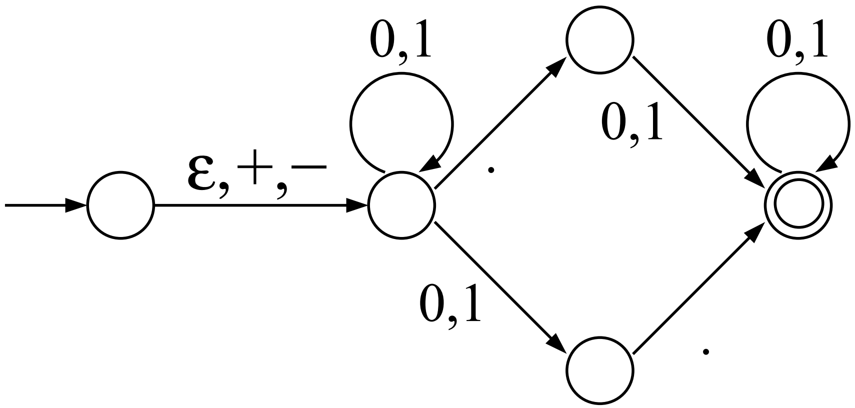
Motivierendes Beispiel:



Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Automaten mit ϵ-Übergängen

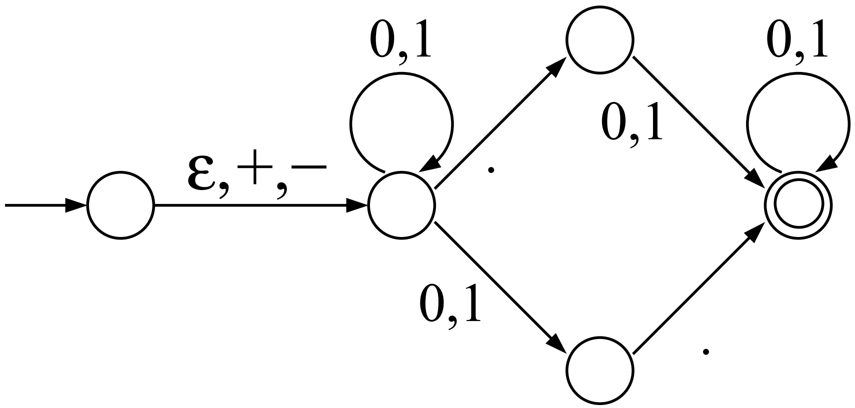
Motivierendes Beispiel:



Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Automaten mit ϵ-Übergängen

Motivierendes Beispiel:



Ein endlicher Automat mit ϵ-Übergängen (ϵ-NEA) ist definiert wie ein NEA, nur mit

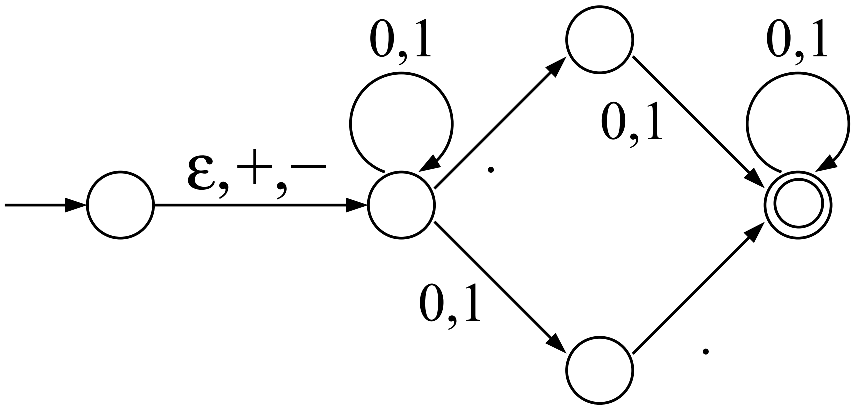
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Automaten mit ϵ-Übergängen

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Motivierendes Beispiel:



Ein endlicher Automat mit ϵ-Übergängen (ϵ-NEA) ist definiert wie ein NEA, nur mit

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$

Im Beispiel: $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1\}$

Hüllenbildung

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ϵ-NEA.

Für $P \subseteq Q$ ist die ϵ-Hülle(P) induktiv definiert durch:

Hüllenbildung

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ϵ-NEA.

Für $P \subseteq Q$ ist die ϵ-Hülle(P) induktiv definiert durch:

- $P \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(P)$

Hüllenbildung

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ϵ-NEA.

Für $P \subseteq Q$ ist die ϵ-Hülle(P) induktiv definiert durch:

- $P \subseteq \epsilon\text{-Hülle}(P)$
- Ist $p \in \epsilon\text{-Hülle}(P)$ und $q \in \delta(p, \epsilon)$,
  dann ist $q \in \epsilon\text{-Hülle}(P)$.

Erweiterte Übergangsfunktion

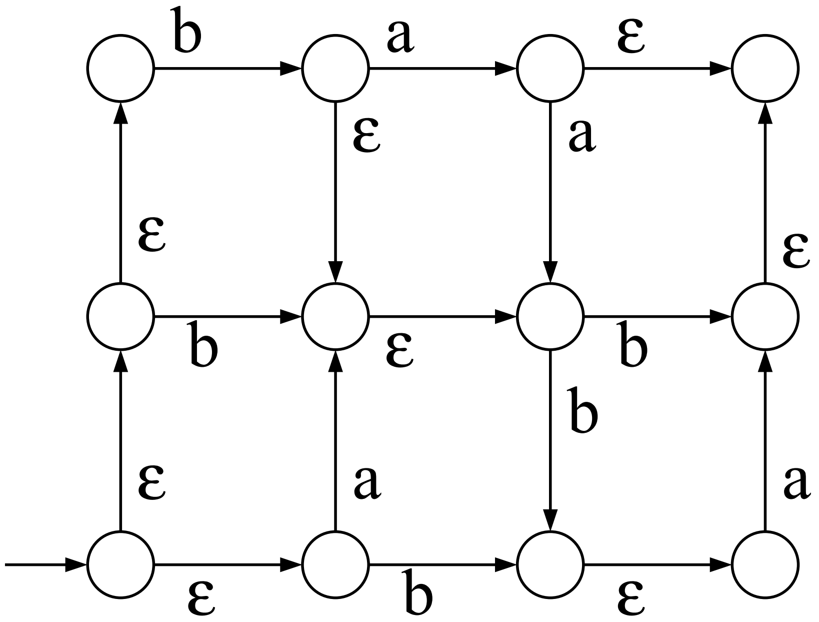
Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Wie beim DEA wird die Übergangsfunktion δ auf Σ^* erweitert:

$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(q, \epsilon) &= \epsilon\text{-Hülle}(\{q\}) \\
\hat{\delta}(q, wa) &= \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(q', a) \Big)
\end{aligned}$$

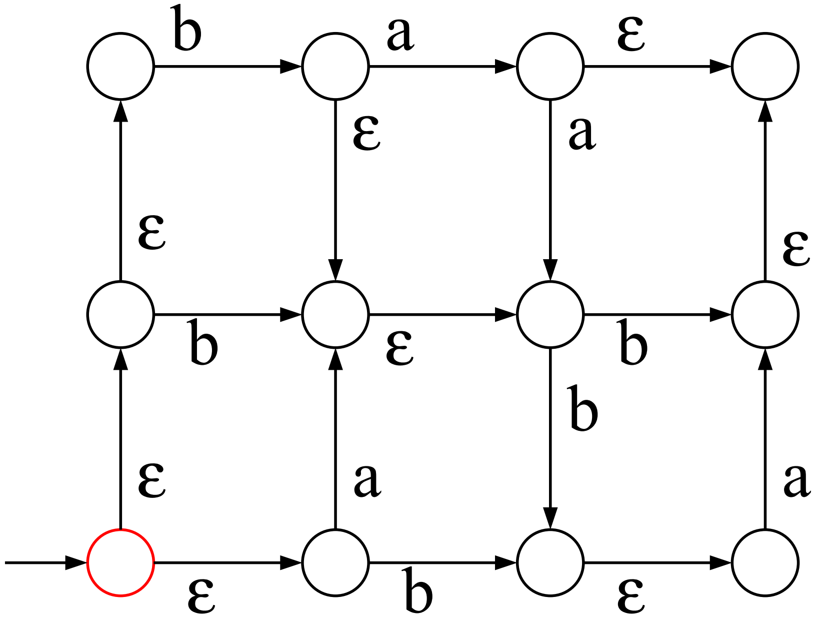
Beispiel



Berechne $\hat{\delta}(\, q_0 \,,\, ab \,)$:

$\hat{\delta}(q_0, \epsilon)$

Beispiel

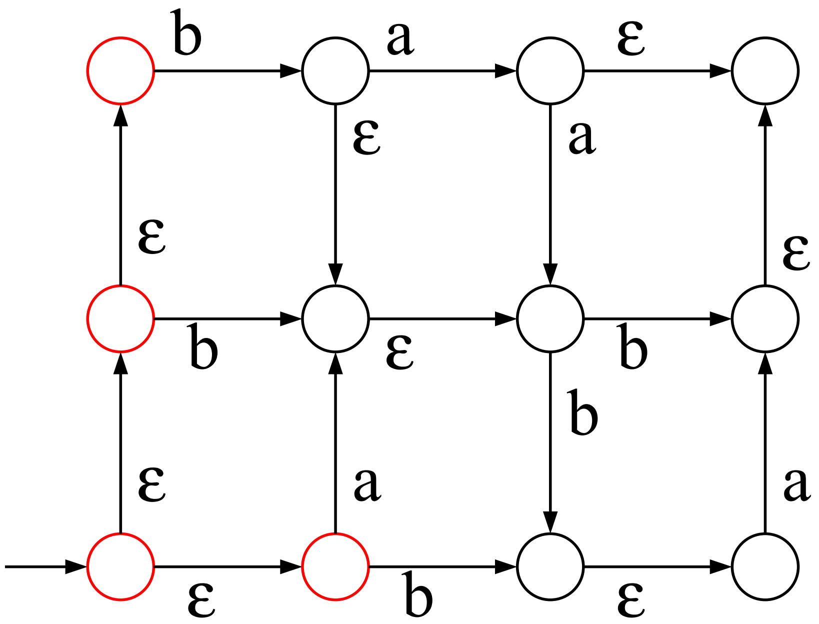


Berechne $\hat{\delta}(\ q_0\ ,\ ab\ )$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) \qquad = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\})$$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel

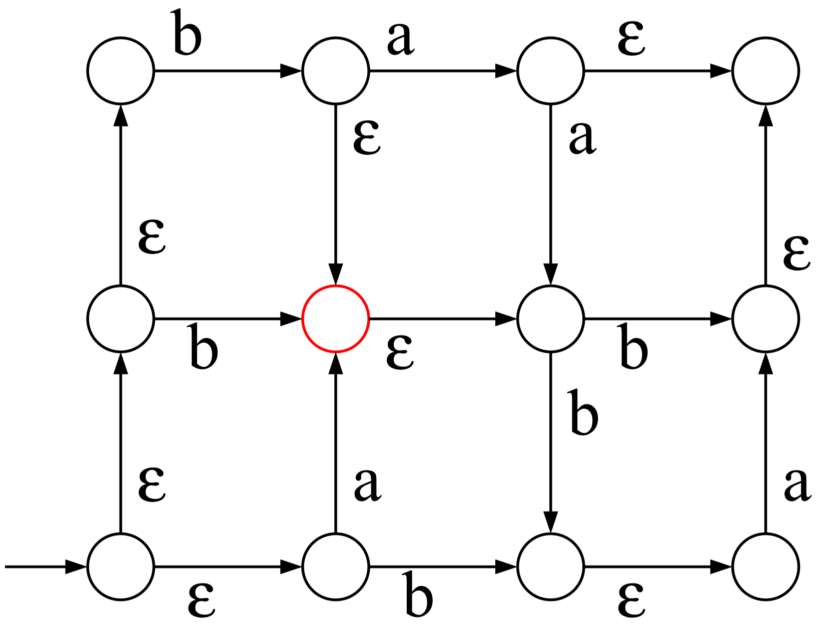


Berechne $\hat{\delta}(\, q_0 \,,\, ab \,)$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) \quad = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_0\}\big) \quad = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beispiel



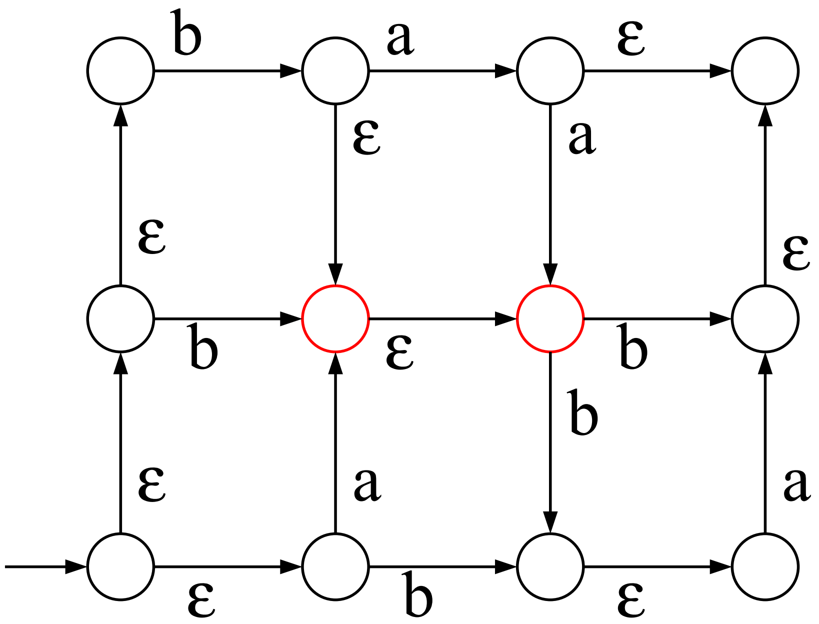
Berechne $\hat{\delta}(\, q_0 \,,\, ab \,)$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_0\}\big) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, a) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_4\}\big)$$

Beispiel

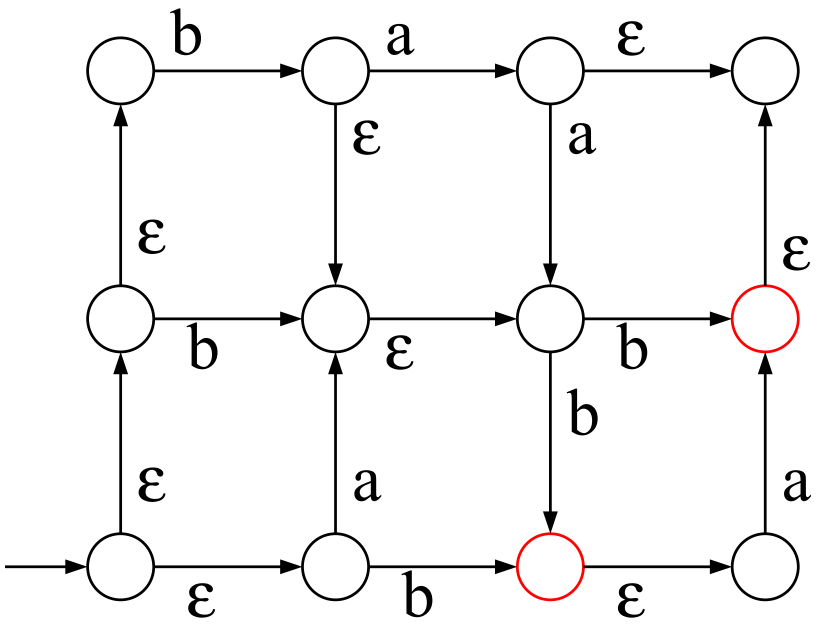
Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten



Berechne $\hat{\delta}(q_0, ab)$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, a) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_4\}) = \{q_4, q_7\}$$

Beispiel



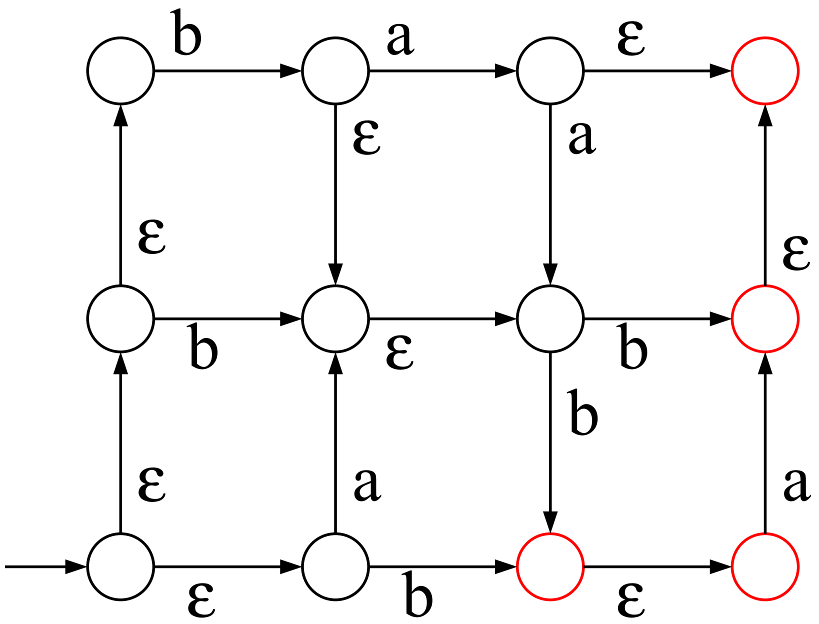
Berechne $\hat{\delta}(\ q_0\ ,\ ab\ )$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_0\}\big) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, a) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_4\}\big) = \{q_4, q_7\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, ab) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_6, q_{10}\}\big)$$

Beispiel



Berechne $\hat{\delta}(\ q_0\ ,\ ab\ )$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, a) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_4\}) = \{q_4, q_7\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, ab) = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_6, q_{10}\}) = \{q_6, q_9, q_{10}, q_{11}\}$$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA.

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_E}$.

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_E}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_E$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q \in S} \delta_E(q, a)\Big)$$

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_E}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_E$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q \in S} \delta_E(q, a)\Big)$$

- Anfangszustand ist $q_D := \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\})$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_E}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_E$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q \in S} \delta_E(q, a)\Big)$$

- Anfangszustand ist $q_D := \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\})$
- Endzustände in F_D sind Mengen S mit

$$S \cap F_E \neq \emptyset$$

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Beweis der Äquivalenz

Theorem

Sei $A_E = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ *ein* ϵ*-NEA,*

und $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ *der mit der Teilmengenkonstruktion gewonnene DEA.*

Dann ist $L(A_D) = L(A_E)$*.*

Beweis der Äquivalenz

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Teilmengen-konstruktion
Exponentieller Blow-up
ϵ-Übergänge
Reguläre Ausdrücke
Pumping Lemma
Kontextfreie Sprachen
Pushdown-Automaten

Theorem

Sei $A_E = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ *ein* ϵ*-NEA,*

und $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ *der mit der Teilmengenkonstruktion gewonnene DEA.*

Dann ist $L(A_D) = L(A_E)$.

Lemma

Seien A_E *und* A_D *wie oben. Es gilt für alle* $w \in \Sigma^*$*:*

$$\hat{\delta}_D(\, q_D \,,\, w\,) = \hat{\delta}_E(\, q_0 \,,\, w\,)$$