

## Übungen zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

### Blatt 8

**Aufgabe 8-1 (Turing-Maschinen)** Gegeben sei die (nichtdeterministische) Turing-Maschine  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$  mit  $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{a, b, \square\}$ ,  $E = \{z_7\}$  sowie:

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= \{(z_1, \square, R), (z_3, a, N)\} & \delta(z_1, a) &= \{(z_2, \square, R)\} & \delta(z_2, a) &= \{(z_7, \square, N)\} \\ \delta(z_3, a) &= \{(z_4, \square, R)\} & \delta(z_3, \square) &= \{(z_7, \square, N)\} & & \\ \delta(z_4, a) &= \{(z_4, a, R)\} & \delta(z_4, b) &= \{(z_4, b, R)\} & \delta(z_4, \square) &= \{(z_5, \square, L)\} \\ \delta(z_5, b) &= \{(z_6, \square, L)\} & & & & \\ \delta(z_6, \square) &= \{(z_3, \square, R)\} & \delta(z_6, a) &= \{(z_6, a, L)\} & \delta(z_6, b) &= \{(z_6, b, L)\} \end{aligned}$$

Auf allen weiteren Argumenten soll  $\delta$  den Wert  $\emptyset$  haben.

- Geben Sie je einen Lauf der Turingmaschine an, welcher bezeugt, dass die Wörter  $aabb$  und  $aaab$  in der akzeptierten Sprache liegen. Anzugeben sind zwei Folgen von Konfigurationen  $z_0w \vdash K_1 \vdash K_2 \vdash \dots \vdash K_n$ , eine für  $w = aabb$  und eine für  $w = aaab$ , so dass jeweils der Zustand in der letzten Konfiguration  $K_n$  ein Endzustand ist.
- Welche Sprache akzeptiert die Maschine?

### Aufgabe 8-2 (Turing-Maschinen, 4 Punkte)

- Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine mit Eingabealphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  an, welche im Eingabewort das erste Vorkommen von  $ab$  durch  $c$  ersetzt und die dann anhält (indem sie in einen Zustand  $z_{halt}$  mit  $\delta(z_{halt}, x) = \{(z_{halt}, x, N)\}$  übergeht). Ist das Eingabewort zum Beispiel  $bacbbababc$ , so soll am Ende  $bacbbcabc$  auf dem Band stehen.

Erläutern Sie kurz die Funktionsweise Ihrer Maschine<sup>1</sup>!

- Geben Sie einen Lauf Ihrer Maschine auf dem Wort  $aabaa$  an. Sie können mehrere ähnliche Schritte zusammenfassen.

---

<sup>1</sup>In Aufgabe 8-1 könnte man die Gleichungen  $\delta(z_4, a) = \{(z_4, a, R)\}$ ,  $\delta(z_4, b) = \{(z_4, b, R)\}$  und  $\delta(z_4, \square) = \{(z_5, \square, L)\}$  zum Beispiel so erklären, dass dadurch der Kopf der Maschine ans Ende der Eingabe gefahren wird.

**Aufgabe 8-3 (Loop-Programme, 4 Punkte)** Schreiben Sie ein LOOP-Programm, welches die Funktion  $div_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$div_2(x) = \begin{cases} x/2 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ (x-1)/2 & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnet.

Benutzen Sie keinerlei abkürzende Notationen. Ihr Programm muss der folgenden Grammatik entsprechen, in der  $N$  für ein Nichtterminalsymbol steht, von dem genau die natürlichen Zahlen ableitbar sind:

$P \rightarrow x_N := 0 \mid x_N := x_N + N \mid x_N := x_N - N \mid P;P \mid \text{LOOP } x_N \text{ DO } P \text{ END}$

**Aufgabe 8-4** In LOOP-Programmen gibt es keine IF-Tests, man kann diese jedoch definieren. Schreibe **SIGN**  $x_j$  als Abkürzung für das Programm **LOOP**  $x_j$  **DO**  $x_j := 1$  **END**. Hat  $x_j$  den Wert 0, so hat  $x_j$  auch nach Ausführung von **SIGN**  $x_j$  diesen Wert. Hat  $x_j$  einen Wert größer als 0, so hat  $x_j$  nach Ausführung von **SIGN**  $x_j$  den Wert 1. Damit kann man

**IF**  $x_i > 0$  **THEN**  $P$  **END**

als Abkürzung für das Programm

$x_j := x_i$ ; **SIGN**  $x_j$ ; **LOOP**  $x_j$  **DO**  $P$  **END**

definieren. Dabei wird  $j$  größer als  $i$  und größer als jede in  $P$  vorkommende Variablennummer gewählt.

Definieren Sie analog eine Abkürzung **IF**  $x_i = k$  **THEN**  $P_1$  **ELSE**  $P_2$  **END** für eine beliebige gegebene natürliche Zahl  $k$  sowie beliebige LOOP-Programme  $P_1$  und  $P_2$ . Wenn der Wert der Variable  $x_i$  gleich  $k$  ist, so soll  $P_1$  ausgeführt werden, sonst  $P_2$ .

**Abgabe:** Sie können ihre Lösungen bis Montag, den 25.6., um 12:00 Uhr im Abgabekasten in der Theresienstraße oder über UniWorX abgeben. In UniWorX werden Dateien im **txt**-Format (reiner Text) oder im **pdf**-Format akzeptiert.