Prof. Martin Hofmann
Dr. Andreas Abel
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
SS 2012

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 11

Aufgabe 11-1 (Hilbert's Zehntes Problem) Eine Diophantische Gleichung hat die Form $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ wobei p ein Polynom in den ganzzahligen Variablen $\vec{x} = x_1..x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Beispiele sind $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 - x_3^3$ oder $p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 - 5$. Matijassewitsch bewies 1972, dass die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen, Hilbert's Zehntes Problem, HILBERT10, d.h. die Menge $\{p \mid \exists \vec{x}.\ p(\vec{x}) = 0\}$ unentscheidbar ist.

Dr. Abel schlägt nun folgenden nicht-deterministischen Algorithmus vor, um zu zeigen, dass HILBERT10 in NP ist: Man rate die Lösung $\vec{x}$ und teste dann, ob $p(\vec{x}) = 0$. Letzteres lässt sich in polynomieller Zeit bewerkstelligen (nur Multiplikation und Additon von ganzen Zahlen).

Ist das ein Widerspruch zu Matijassewitsch' Ergebnis? Wenn ja, wo liegt der Fehler in Dr. Abel's Argumentation?

Aufgabe 11-2 (Ein Graphenfärbeproblem, 4 Punkte) Gegeben sei ein ungerichteter Graph. Jede Kante sei entweder rot oder grün gefärbt. Wir wollen nun, falls möglich, die Knoten des Graphen rot oder grün färben, so dass jede rote Kante an mindestens einen roten Knoten anliegt und jede grüne Kante an mindestens einem grünen Knoten. Diese Färbeproblem nennen wir ADJ2COL.

a) Geben Sie einen Graphen an, dessen Knoten nicht auf diese Art gefärbt werden können.

b) Reduzieren Sie dieses Problem auf 2SAT.

Bemerkung: Damit haben Sie gezeigt, dass dieses Problem in polynomieller Zeit lösbar ist, denn 2SAT ist in der Komplexitätsklasse P. 2SAT ist eine Beschränkung von SAT analog zu 3SAT: Klauseln bestehen aus genau 2 Literalen.

Aufgabe 11-3 (Soziales Netzwerk) Sie analysieren soziale Netzwerke; insbesondere interessiert Sie die Diversität der Freundschaften von prominenten Persönlichkeiten. Dazu laden Sie für eine Person x den Freundschaftsgraph G aller Freunde von x herunter, und wollen nun darin eine Menge M von mindestens k Personen finden, die sich untereinander nicht kennen — d.h., keine zwei Personen von M sind im Netzwerk miteinander verbunden. Falls so eine Menge M existiert, so habe der Graph G *Diversität* k.

Ist die Menge $\{(G, k) \mid G \text{ ungerichteter Graph mit Diversität } k\}$ NP-schwer? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 11-4 (Exponentiation, 4 Punkte) Mit n, m bezeichnen wir natürliche Zahlen in Binärkodierung. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge $\{(n, m) \mid m = 2^n\}$ ist in der Komplexitätsklasse P.

Sie können ihre Lösungen bis **Montag, den 16.7., um 12:00 Uhr** im Abgabekasten in der Theresienstraße oder über UniWorX abgeben. In UniWorX werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.