Prof. Martin Hofmann
Dr. Andreas Abel
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
SS 2012

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 10

Aufgabe 10-1 Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme.

a) Gegeben sei eine Turingmaschine M, eine Eingabe w und eine natürliche Zahl k. Ist es der Fall, dass M mit Eingabe w in höchstens k Berechnungsschritten anhält?

b) Gegeben sei eine Turingmaschine M, eine Eingabe w und eine natürliche Zahl k. Ist es der Fall, dass M mit Eingabe w nach mehr als k Berechnungsschritten anhält?

Welches dieser Probleme ist entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10-2 Zeigen Sie:

a) Eine Sprache L ist vom Typ 0 (d.h. L wird von einer Turingmaschine akzeptiert) genau dann wenn L semi-entscheidbar ist.

b) Sind L_1 und L_2 beide semi-entscheidbar, so ist auch $L_1 \cap L_2$ semi-entscheidbar.

Sie brauchen die Konstruktion von berechenbaren Funktionen nicht in allen Details anzugeben. Beispiel: Angenommen Sie wollen eine Turingmaschine M konstruieren, die eine bereits bekannte Turingmaschine N für k Schritte simulieren soll. Das könnte man in etwa so beschreiben: Die Maschine M schreibt zunächst die Eingabe für N auf ein Arbeitsband und die Anzahl k auf ein zweites Arbeitsband. Dann simuliert M einen Schritt von N auf dem Arbeitsband und dekrementiert die Zahl k auf dem anderen Band. Die Maschine M wiederholt dies dann so lange, bis die Zahl auf dem zweiten Band gleich 0 ist.

Aufgabe 10-3 (4 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine *totale* berechenbare Funktion. Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ und $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$. Zeigen Sie:

a) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar, dann ist $f(A)$ semi-entscheidbar.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar, dann ist $f^{-1}(A)$ entscheidbar.

c) Finden Sie eine totale berechenbare Funktion f und eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, so dass $f(A)$ entscheidbar ist, nicht aber A.

Aufgabe 10-4 (4 Punkte) Gegeben sei folgende Sprache:

$$L = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ codiert eine Turingmaschine, die für mindestens eine Eingabe anhält}\}$$

a) Zeigen Sie, dass L unentscheidbar ist, indem Sie eine Reduktion vom Problem

$$H_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ codiert eine Turingmaschine, die bei leerer Eingabe anhält}\}$$

angeben.

b) Zeigen Sie, dass L semi-entscheidbar ist.

c) Folgern Sie, dass $\mathbb{N} \setminus L$ nicht semi-entscheidbar ist.

Abgabe: Sie können ihre Lösungen bis Montag, den 9.7., um 12:00 Uhr im Abgabekasten in der Theresienstraße oder über UniWorX abgeben. In UniWorX werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.