

Übungen zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 1

Allgemeine Hinweise zum Übungsbetrieb: Es wird wöchentlich ein Übungsblatt ausgegeben (jeweils freitags), welches in der Regel bis zum Montag der übernächsten Woche zu bearbeiten ist (Bearbeitungszeit: 1 Woche + 1 Wochenende). Die Lösungen können abgegeben werden in Papierform in einem Abgabekasten in der Theresienstraße 39 (erster Stock, Aufschrift „Formale Sprachen und Komplexität“) oder elektronisch über UniWorX. In UniWorX werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.

Ausgewählte Aufgaben sind mit einer Punktzahl gekennzeichnet. Durch Lösung solcher Aufgaben kann ein Bonus auf die Klausurnote erworben werden. Aufgaben, die mit Punkten gekennzeichnet sind und deshalb zum Notenbonus zählen, müssen *allein* bearbeitet werden.

Die Lösungen der Übungsblätter werden in den Übungen in der Woche der Abgabe besprochen.

Aufgabe 1-1 (Herleitung) Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow bSAA \mid \varepsilon, \\ & A \rightarrow a, \\ & bA \rightarrow Ab \}. \end{aligned}$$

Sei $w = ababaa$. Beweisen Sie $w \in L(G)$, indem Sie eine Ableitung $S \Rightarrow \dots \Rightarrow w$ angeben.

Aufgabe 1-2 (Rechnen mit Sprachen) Welche der folgenden Gleichungen sind für beliebige Sprachen X, Y und Z über dem Alphabet $\{a, b\}$ gültig?

- a) $(X \cup Y)Z = XZ \cup YZ$
- b) $X^+ \cup Y^+ = (X \cup Y)^+$
- c) $X^+ \cdot X^* = X^+$
- d) $(X \cap Y)Z = XZ \cap YZ$

Aufgabe 1-3 (Chomsky-Hierarchie, 4 Punkte) Was ist der höchste Typ der folgenden Grammatiken in der Chomsky-Hierarchie? Beschreiben Sie die von den Grammatiken erkannten Sprachen.

a) $G_1 = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \rightarrow T \mid U, \\ T \rightarrow aTb \mid b, \\ U \rightarrow bUa \mid a\}.$$

b) $G_2 = (\{S, T, U\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \rightarrow aT \mid bU \mid a, \\ T \rightarrow aU \mid bS \mid a, \\ U \rightarrow aS \mid bT \mid a\}.$$

Hinweis: Was können Sie über die Anzahl der as und bs in den Wörtern in $L(G_2)$ aussagen?

c) $G_3 = (\{S, E\}, \{0, 1\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \rightarrow 0EE, \\ E \rightarrow 1, \\ 0E \rightarrow E0\}.$$

Geben Sie eine Typ-3-Grammatik für die Sprache $L(G_3)$ an.

Aufgabe 1-4 (Leichte Knobelaufgabe) In den folgenden Aufgaben verwenden wir das Alphabet $\Sigma = \{0, 1, !\}$. Die Sprache $B = \{1u \mid u \in \{0, 1\}^*\}$ enthält die Binärdarstellungen der positiven Zahlen.

a) (Zum Aufwärmen:) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache B an.

b) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache $D = \{w!w \mid w \in B\}$ an. Leiten Sie in Ihrer Grammatik das Wort $110!110$ her.

c) Modifizieren Sie Ihre Grammatik, so dass die Sprache $I = \{w!w^{+1} \mid w \in B\}$ erzeugt wird, wobei wir mit w^{+1} das Inkrement der Zahl w bezeichnen, also $w^{+1} = w + 1$ (als Binärzahl). Zum Beispiel ist $1011!1100 \in I$. Leiten Sie das Wort $11!100$ her.