Prof. Martin Hofmann
Dr. Andreas Abel
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
16. April 2012

Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 0

Aufgabe 0-1 (Logik).

a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln, ob sie allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar ist.

i) $(A \to B \to C) \leftrightarrow A \wedge B \to C$

ii) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge \neg(A \to C)$

iii) $(A \to B) \to (B \to A)$

iv) $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$

b) Berechnen Sie die Negation folgender prädikatenlogische Aussagen.

i) $\exists c.\, \exists n_0.\, \forall n.\, n > n_0 \to f(n) \leq c \cdot g(n)$

ii) $\forall x.\, \exists y.\, xRy \wedge \forall z.\, xRz \to y = z$

c) Drücken Sie die Kontraposition der folgenden Aussagen aus.

i) Gilt $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in S$, so gilt auch $(x, z) \in RS$.

ii) Ist die Zahl n ungerade, so gibt es eine größere Zahl, die gerade ist.

d) Beweisen Sie folgende Gleichungen für beliebige Mengen X, Y, Z und X_i für $i \geq 0$:

i) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

ii) $X \cup Y = \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}$ (hierbei bezeichnet $\overline{Z}$ das Komplement der Menge Z)

iii) $\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{X_i}$

Aufgabe 0-2 (Äquivalenzrelationen)

a) Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?

i) Die üblichen Relationen $<$, $\leq$ und $=$ auf natürlichen Zahlen.

ii) $S_k \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $S_k = \{(m, n) \mid m \equiv n \mod k\}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

iii) $T \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ mit $T = \{((m, n), (m', n')) \mid m + n' = m' + n\}$.

b) Beschreiben Sie für jede Äquivalenzrelation aus dem vorangegangen Punkt die Faktormenge, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation.

c) Die Verkettung RS zweier Relationen R und S ist definiert durch $RS = \{(x, z) \mid \exists y.\, xRy \wedge ySz\}$. Zeigen Sie: Für jede Äquivalenzrelation gilt $R = RR$.

Aufgabe 0-3 (Beweis durch Induktion) Beweisen Sie folgende Aussage rigoros durch vollständige Induktion. Für jede endliche Menge M gibt es genau $3^{|M|}$ Paare (M_1, M_2) von disjunkten Mengen $M_1 \subseteq M$ und $M_2 \subseteq M$. Hierbei bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

Aufgabe 0-4 (Beweis durch Widerspruch) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ heiße *arithmetisch*, wenn es eine Zahl $k > 0$ gibt, so dass gilt: Für alle $x \in M$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x + n \cdot k \in M$.

Beweisen Sie rigoros durch Widerspruch, dass die Menge $E = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht arithmetisch ist.