Inhalt Kapitel 3: Induktion und Termination

1. Wohlfundierte Relationen
   - Ackermannfunktion
2. Induktionsprinzip
   - Untere Schranke für Türme von Hanoi
   - Weitere Beispiele

Wohlfundierte Relationen

Definition Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ ist wohlfundiert, wenn es keine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Elementen in M gibt sodass $a_{i+1} R a_i$ für alle $i \geq 1$.

Ist R eine wohlfundierte Relation auf einer Menge M, so kann man anstelle einer Abstiegsfunktion $m : A \to \mathbb{N}$ auch eine Abstiegsfunktion $m : A \to M$ wählen, derart dass $m(y) R m(x)$ wenn $f(y)$ in $E[f, x]$ aufgerufen wird (die Bedingungen DEF und AUF bleiben unverändert).

Beispiele

- $M = \mathbb{N}$ und $xRy \Leftrightarrow x < y$.
- $M = \mathbb{N}$ und $xRy \Leftrightarrow y = x + 1$
- $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und
  $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2)$.

$$\dots (1, 100)R(2, 1)R(2, 3)R(2, 4)R(2, 5)R(3, 0)R(3, 1)$$

Es gibt unendlich viele (x, y) mit $(x, y)R(1, 0)$ (nämlich $(0, y)$ für alle y), trotzdem ist R wohlfundiert.

Mit letzterer Relation kann man die Termination der Ackermannfunktion für alle nat. Zahlen zeigen:

```
fun ack(x,y) =      if x = 0 then y+1
               else if y = 0 then ack(x-1,1)
               else              ack(x-1,ack(x,y-1))
```

Abstiegsfunktion $m(x, y) = (x, y)$

Zur Ackermannfunktion

```
fun ack(x,y) =      if x = 0 then y+1
               else if y = 0 then ack(x-1,1)
               else               ack(x-1,ack(x,y-1))
```

- Definiert für alle $x, y \in \mathbb{N}$
- $\mathtt{ack}(1, y) = y + 2$
- $\mathtt{ack}(2, y) = 2y + 3$
- $\mathtt{ack}(3, y) = 2^{y+3} - 3$
- $\mathtt{ack}(4, 2) = 2^{\mathtt{ack}(4,1)+3} - 3 = 2^{2^{16}} - 3$
- Eingeführt von W. Ackermann (1926); vereinfachte Version, s.o., von Rózsa Péter (1955).

Induktionsbeweise

So wie man eine Funktion rekursiv definieren kann, also durch "Rückgriff" auf andere (hoffentlich schon bekannte) Funktionswerte, so kann man eine Behauptung dadurch beweisen, dass man sie für andere Fälle als bereits bewiesen voraussetzt ("rekursiver Beweis").

Natürlich muss man dann argumentieren, dass die Kette der rekursiven Rückgriffe irgendwann abbricht, wozu sich wiederum die Abstiegsfunktion anbietet.

Ein solcher rekursiver Beweis mit Abstiegsfunktion ist ein Induktionsbeweis.

Induktionsprinzip

Sei

- R eine wohlfundierte Relation auf einer Menge M,
- $m : A \to M$ eine Funktion,
- $P \subseteq A$ eine Teilmenge von A.

Falls für alle $a \in A$ gilt

"a ist in P unter der Annahme, dass alle $y \in A$ mit $m(y) R m(a)$ in P sind"

dann ist $P = A$.

Beweis des Induktionsprinzips

- Äquivalente Formulierung der Bedingung:

  "Falls $a \notin P$ dann existiert $y \in A$ mit $m(y)Rm(x)$ und $y \notin P$".
- Ein einziges Gegenbeispiel $a \notin P$ zieht also eine unendlich lange Kette von Gegenbeispielen nach sich im Widerspruch zur Wohlfundiertheit von R.

Vollständige Induktion

- Oftmals ist $A = \mathbb{N}$ und $m(n) = n$ und xRy, falls $y = x + 1$.
- Hier muss man $0 \in P$ ohne Voraussetzungen zeigen.
- Bei $a = y + 1$ darf man aber $y \in P$ schon voraussetzen.
- Diesen Spezialfall des Induktionsprinzips bezeichnet man als Vollständige Induktion

Beispiel

Behauptung: Jedes nur denkbare Verfahren zum Transfer von n Scheiben braucht mindestens $2^n - 1$ Befehle.
Sei P die Menge derjenigen Zahlen n für die das gilt.
$0 \in P$ ist klar, da $2^0 - 1 = 0$.
Sei jetzt $n > 0$. Irgendwann wurde die größte Scheibe verlegt. Dazu aber müssen $n - 1$ Scheiben weggeschafft worden sein (auf den Hilfsstapel). Nach Annahme kostet das mindestens $2^{n-1} - 1$ Befehle. Danach müssen die $n - 1$ Scheiben auf die größte verschafft werden: wieder $2^{n-1} - 1$ Befehle. Insgesamt also $2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 = 2^n - 1$ Befehle.

Beispiel

Sei $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Beachte: $\phi^2 = \phi + 1$.
Behauptung: Es ist $\mathtt{fib}(n) = a\phi^n + b(-\phi)^{-n}$ wobei $a + b = 1$ und $a\phi - b(1/\phi) = 1$.
Sei P die Menge der n für die das wahr ist. Wir wählen $m(x) = x$ und $yRx \Leftrightarrow y < x$.
Es ist $0 \in P$ und $1 \in P$ (Nach Def. von a, b; bei Zweifel nachrechnen)
Wenn $n \geq 2$, dann $\mathtt{fib}(n) = \mathtt{fib}(n-1) + \mathtt{fib}(n-2) =$
$a\phi^{n-1} + b(-\phi)^{-n+1} + a\phi^{n-2} + b(-\phi)^{-n+2} =$
$a\phi^n(\phi^{-1} + \phi^{-2}) + b(-\phi)^{-n}(-\phi + \phi^2) = a\phi^n + b(-\phi)^{-n}$.
Also $n \in P$ und $P = \mathbb{N}$.

Beispiel: Endständige Rekursion

```
fun f1(i,n,a) = if i=n then a else f1(i+1,n,a+i)
```

Man zeige durch Induktion, dass $\texttt{f1}(i, n, a) = a + \sum_{j=i}^{n-1} j$.

- Als Abstiegsfunktion nimmt man $m(i, n, a) = \max(n - i, 0)$.
- Falls $m(i, n, a) = 0$ so gilt $i = n$ und $\texttt{f1}(n, n, a) = a = a + \sum_{j=n}^{n-1} j$
- Falls $m(i, n, a) > 0$ so gilt $\texttt{f1}(i, n, a) = \texttt{f1}(i+1, n, a+i) = a+i+\sum_{j=i+1}^{n-1} j = a+\sum_{j=i}^{n-1} j$