Prof. Martin Hofmann
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
3. Juni 2011

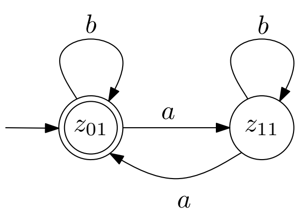
Formale Sprachen und Komplexität

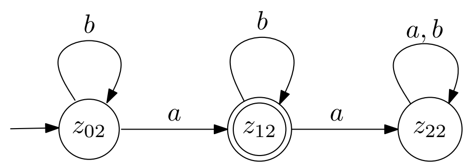
Blatt 5

Aufgabe 5-1. (3 Punkte) Bringen Sie folgende kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform: $G = (\{S, T, U\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, wobei

$$\begin{aligned} P = \{ & S \to T \mid U, \\ & T \to aTb \mid c, \\ & U \to bUa \mid d \}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5-2. (3 Punkte) Seien NEAs $M_i = (Z_i, \{a, b\}, \delta_i, A_i, E_i)$ für $i = 1, 2$ gegeben durch:

$M_1 =$ 

$M_2 =$ 

Konstruieren Sie einen NEA M mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$. Benutzen Sie die Produktautomaten-Konstruktion aus der Vorlesung, d.h. M sollte die Form $(Z_1 \times Z_2, \{a, b\}, \delta, A_1 \times A_2, E_1 \times E_2)$ haben.

Aufgabe 5-3. Geben Sie einen Algorithmus an, der entscheidet, ob zwei gegebene reguläre Ausdrücke die gleiche Sprache haben.

Hinweis: Sie brauchen dazu lediglich in der Vorlesung eingeführte Algorithmen unverändert zu zusammenzusetzen.

Aufgabe 5-4. Seien X und Y zwei Sprachen über dem Alphabet Σ. Ihr Mischprodukt $X \sqcup\!\sqcup Y$ ist die folgendermaßen definierte Sprache:

$$\begin{aligned} X \sqcup\!\sqcup Y = \{ w \in \Sigma^* \quad | \quad & \exists n \geq 1.\, \exists x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \Sigma^*. \\ & w = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n \text{ und } x_1 x_2 \ldots x_n \in X \text{ und } y_1 y_2 \ldots y_n \in Y \} \end{aligned}$$

Zum Beispiel besteht $\{aaaa\} \sqcup\!\sqcup \{bbb\}$ aus allen Wörtern über $\{a, b\}$, die genau vier as und drei bs enthalten. Das Wort $aaaabbb$ ist in dieser Sprache, da man $n = 2$, $x_1 = aaaa$, $x_2 = \varepsilon$, $y_1 = \varepsilon$ sowie $y_2 = bbb$ wählen kann; Das Wort $babaaab$ ist darin, da man $n = 3$, $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = a$, $x_3 = aaa$ und $y_1 = y_2 = y_3 = b$ wählen kann; usw.

Zeigen Sie, dass das Mischprodukt zweier regulärer Sprachen stets regulär ist, indem Sie zu gegebenen NEAs mit den Sprachen X und Y einen NEA mit der Sprache $X \sqcup\!\sqcup Y$ konstruieren. Geben Sie Ihre Konstruktion formal an und führen Sie diese am Beispiel der Automaten aus Aufgabe 5-2 aus.

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, einen Automaten mit Zustandsmenge $Z_1 \times Z_2$ zu betrachten, wobei Z_1 und Z_2 die Zustandsmengen der gegebenen Automaten für X und Y sind.

Aufgabe 5-5. Die folgenden (wahren) Aussagen scheinen dem Pumping-Lemma zu widersprechen. Erklären Sie jeweils warum tatsächlich kein Widerspruch vorliegt.

a) Jede endliche Sprache ist regulär. Durch das Aufpumpen eines Worts in einer endlichen Sprache entstehen unendlich viele verschiedene Wörter, die wegen der Endlichkeit natürlich nicht alle wieder in der Sprache sein können. Das Pumping-Lemma sagt jedoch, dass reguläre Sprachen unter dem Aufpumpen von Wörtern abgeschlossen sind. Warum liegt hier kein Widerspruch vor?

b) Die Sprache $L = \{ca^k b^m \mid k, m \geq 0\}$ ist regulär. Man kann jedoch für jedes Wort $z \in L$ eine Zerlegung $z = uvw$ finden, die zwar $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ erfüllt, für die $uv^i w \in L$ jedoch *nicht* für alle i gilt. Für $z = ca^k b^m$ ist nämlich $u = \varepsilon$, $v = c$ und $w = a^k b^m$ eine solche Zerlegung. Warum widerspricht dies nicht dem Pumping-Lemma?

Abgabe: Sie können ihre Lösungen bis Freitag, den 10.06., um 18:00 Uhr im Abgabekasten in der Theresienstraße oder über UniWorX abgeben. In UniWorX werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.