Prof. Martin Hofmann
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
15. Juli 2011

Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 11

Aufgabe 11-1. Betrachten Sie die folgenden Entscheidungsprobleme.

a) Gegeben sei eine Turingmaschine M, eine Eingabe w und eine natürliche Zahl k. Ist es der Fall, dass M mit Eingabe w in höchstens k Berechnungsschritten anhält?

b) Gegeben sei eine Turingmaschine M, eine Eingabe w und eine natürliche Zahl k. Ist es der Fall, dass M mit Eingabe w nach mehr als k Berechnungsschritten anhält?

Welches dieser Probleme ist entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11-2. Das spezielle Halteproblem

$$K = \{e \in \mathbb{N} \mid e \text{ kodiert eine Turingmaschine, die mit der Eingabe } e \text{ anhält}\}$$

ist semientscheidbar und damit rekursiv aufzählbar. Es gibt also eine totale berechenbare Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche die Menge K aufzählt, d.h. $K = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Zeigen Sie, dass es jedoch keine berechenbare Funktion $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, welche die Menge K in echt aufsteigender Reihenfolge aufzählt, d.h. die $K = \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ sowie $g(i) < g(i+1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt. *Hinweis*: Zeigen Sie, dass aus der Existenz eines solchen g die Entscheidbarkeit von K folgen würde.

Aufgabe 11-3. (3 Punkte) Sei $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine *totale* berechenbare Funktion. Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ und $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$. Zeigen Sie:

a) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar, dann ist auch $f(A)$ rekursiv aufzählbar.

b) Ist $B \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar, so ist $f^{-1}(B)$ rekursiv aufzählbar.

c) Finden Sie eine totale berechenbare Funktion f und eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, so dass $f(A)$ entscheidbar ist, nicht aber A.

Aufgabe 11-4. (3 Punkte) Gegeben sei die folgende Menge T:

$$T = \{e \in \mathbb{N} \mid e \text{ kodiert eine Turingmaschine, die für } \textit{alle} \text{ Eingaben anhält}\}$$

Zeigen Sie, dass T unentscheidbar ist, indem Sie eine Reduktion vom Problem

$$H_0 = \{e \in \mathbb{N} \mid e \text{ kodiert eine Turingmaschine, die mit dem leeren Wort als Eingabe anhält}\}$$

auf T angeben.

Aufgabe 11-5.

a) Geben Sie eine Lösung der folgenden Instanz des Postschen Korrespondenzproblems an: $(00, 01), (01, 101), (01, 011), (100, 000), (101101, 0110)$

b) Beweisen Sie, dass die Instanz $(1, 0), (0, 00), (11, 0), (101101, 010100)$ des Postschen Korrespondenzproblems keine Lösung hat.

Abgabe: Sie können ihre Lösungen bis Freitag, den 22.07., um 18:00 Uhr im Abgabekasten in der Theresienstraße oder über UniWorX abgeben. In UniWorX werden Dateien im `txt`-Format (reiner Text) oder im `pdf`-Format akzeptiert.