

Übungen zur Vorlesung
Semantik von Programmiersprachen

Blatt 4

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Variante der Sprache IMP, in der es einen Postdekrement-Ausdruck $x++$ gibt und in der die **while**-Schleife durch eine **repeat-until**-Schleife ersetzt ist. Die Schleife (**repeat** c **until** b) soll die Bedingung b immer erst nach Ausführung des Schleifenkörpers c prüfen.

Geben Sie eine denotationelle Semantik für diese Variante der Sprache an.

Aufgabe 2. Sei X eine Halbordnung und $Y \subseteq X$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass Y genau dann gerichtet ist, wenn es für alle Elemente $x, y \in Y$ ein Element $z \in Y$ gibt, so dass $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z$ gilt.

Aufgabe 3. Seien X und Y Halbordnungen und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Zeigen Sie folgende Implikationen:

1. Ist f monoton und ist X endlich, so ist f stetig.
2. Ist f stetig, so ist f auch monoton.

Aufgabe 4. Sei X die Menge $\mathbb{N} \cup \{\perp, \omega, \omega'\}$, die aus allen natürlichen Zahlen sowie drei zusätzlichen Elementen \perp , ω und ω' besteht. Definiere eine Halbordnung \sqsubseteq auf X induktiv wie folgt:

$$\frac{x \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega'\}}{\perp \sqsubseteq x} \quad \frac{m \leq n \quad m, n \in \mathbb{N}}{m \sqsubseteq n} \quad \frac{x \in \mathbb{N} \cup \{\perp\}}{x \sqsubseteq \omega} \quad \frac{x \in \mathbb{N} \cup \{\perp, \omega\}}{x \sqsubseteq \omega'}$$

Betrachten Sie folgende Funktion $f: X \rightarrow X$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = \perp \\ x + 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{N} \\ \omega' & \text{wenn } x = \omega \\ \omega' & \text{wenn } x = \omega' \end{cases}$$

1. Ist die Halbordnung X vollständig?
2. Ist f monoton bzw. stetig?
3. Hat f einen Fixpunkt und wenn ja was ist der kleinste Fixpunkt?
4. Berechnen Sie $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} f^i(\perp)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit ihrer Antwort zu 3.

Abgabe: Vor der Vorlesung am 19.5.