

Übungen zur Vorlesung
Semantik von Programmiersprachen
Blatt 2

Aufgabe 1. Geben Sie eine induktive Definition der üblichen Kleiner-Gleich-Relation \leq für die natürlichen Zahlen an.

Aufgabe 2. Sei R eine binäre Relation. Der transitive Abschluss R^+ von R ist eine Relation, die durch folgende Regeln induktiv definiert werden kann.

$$\frac{xRy}{xR^+y} \quad \frac{xR^+y \quad yR^+z}{xR^+z}$$

Schreiben Sie das Induktionsprinzip für die so induktiv definierte Relation R^+ aus.

Aufgabe 3. Eine alternative Definition des transitiven Abschlusses von R kann mit folgenden Regeln erfolgen:

$$\frac{xRy}{xR^t y} \quad \frac{xRy \quad yR^t z}{xR^t z}$$

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass beide Definitionen äquivalent sind, d.h. für beliebige x und y gilt xR^+y genau dann wenn $xR^t y$ gilt.

Zum Beweis dieser Äquivalenz können Sie zum Beispiel folgendermaßen vorgehen:

1. Zeigen Sie zunächst die Implikation $\forall x, y. xR^t y \implies xR^+y$ durch Induktion über die Herleitung von $xR^t y$.
2. Zeigen Sie dann $\forall x, y. xR^t y \implies (\forall z. yR^t z \implies xR^t z)$ durch Induktion über die Herleitung von $xR^t y$.
3. Benutzen Sie die Eigenschaft aus Punkt 2, um die Implikation $\forall x, y. xR^+y \implies xR^t y$ durch Induktion über die Herleitung von xR^+y zu beweisen.

Abgabe: Vor der Vorlesung am 5.5.