14. Juli 2010

Übungen zur Vorlesung

Semantik von Programmiersprachen

Blatt 13

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie: Eine Menge $P \subseteq A \times B$ ist gerichtet genau dann wenn die beiden Mengen $P_1 = \{x \in A \mid \exists y.\, \langle x, y\rangle \in P\}$ und $P_2 = \{y \in B \mid \exists x.\, \langle x, y\rangle \in P\}$ gerichtet sind.

Aufgabe 2. Seien A und B punktierte vollständige Halbordnungen. Definiere

$$A + B = \{\bot\} \cup \{\langle x, 1\rangle \mid x \in A\} \cup \{\langle x, 2\rangle \mid x \in B\}.$$

Sei $\sqsubseteq_{A+B}$ die kleinste binäre Relation auf $A + B$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \bot \sqsubseteq_{A+B} z &\iff z \in A + B \\ \langle x, 1\rangle \sqsubseteq_{A+B} \langle x', 1\rangle &\iff x \sqsubseteq_A x' \\ \langle y, 2\rangle \sqsubseteq_{A+B} \langle y', 2\rangle &\iff x \sqsubseteq_B y' \end{aligned}$$

Seien weiterhin $\mathbf{inl}\colon A \to A + B$ und $\mathbf{inr}\colon A \to A + B$ die durch $\mathbf{inl}(x) = \langle x, 1\rangle$ und $\mathbf{inr}(y) = \langle y, 2\rangle$ definierten Funktionen.

Zeigen Sie, dass $A + B$ eine punktierte vollständige Halbordnung ist, dass es sich dabei aber *nicht* um ein Coprodukt (siehe Übungsblatt 11) von A und B in **Cppo** handelt.

Aufgabe 3. Eine Funktion $f\colon A \to B$ zwischen punktierten Halbordnungen heißt *strikt*, falls sie das kleinste Element von A auf das kleinste Element von B abbildet, d.h. $f(\bot_A) = \bot_B$.

Sei eine CPO A gegeben. Finden Sie eine CPO B und eine stetige Funktion $k\colon A \to B$ mit folgender universeller Eigenschaft: Für jede CPO C und jede stetige Funktion $f\colon A \to C$ gibt es genau eine strikte stetige Funktion $f^\dagger\colon B \to C$, so dass $f = f^\dagger \circ k$ gilt.

Aufgabe 4. Sei M der Term

$$\lambda x\colon \mathbf{Nat}.\, \mathbf{if}\ \mathbf{zero?}(x)\ \mathbf{then}\ \mathbf{succ}(\mathbf{0})\ \mathbf{else}\ \mathrm{mul}\ x\ (f\ \mathbf{pred}(x)),$$

wobei mul eine geeignet definierte Multiplikationsfunktion vom Typ $\vdash \mathrm{mul}\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}$ ist.

Sei $h\colon [\mathbb{N}_\bot \to \mathbb{N}_\bot] \to [\mathbb{N}_\bot \to \mathbb{N}_\bot]$ die durch

$$h(f) = [\![f\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat} \vdash M\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}]\!] \langle \bot, f\rangle$$

definierte Funktion. (Zur Erinnerung: $[\![f\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat} \vdash M\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}]\!]$ ist eine stetige Funktion von $1 \times [\![\mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}]\!]$ nach $[\![\mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}]\!]$ und es gilt $1 = \{\bot\}$.)

Berechnen Sie $h^0(\perp)$, $h^1(\perp)$, $h^2(\perp)$ sowie $\bigsqcup_{n=0}^{\infty} h^n(\perp)$. Sie können dabei annehmen, dass $[\![\vdash \mathrm{mul}\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}]\!]$ jenes Element von $[\mathbb{N}_\perp \to [\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp]]$ ist, das durch

$$[\![\vdash \mathrm{mul}\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}]\!](x)(y) = \begin{cases} \perp & \text{wenn } x = \perp \text{ oder } y = \perp \\ x \cdot y & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5. Betrachten Sie PCF mit einer neuen Konstante $\mathbf{all}\colon (\mathbf{Nat} \to \mathbf{Bool}) \to \mathbf{Bool}$, die folgenden Gleichungen genügen soll:

$$\frac{\{\Gamma \vdash M\ \mathbf{succ}^n(\mathbf{0}) = \mathbf{true}\colon \mathbf{Bool}\}_{n\in\mathbb{N}}}{\Gamma \vdash \mathbf{all}\ M = \mathbf{true}\colon \mathbf{Bool}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M\ \mathbf{succ}^n(\mathbf{0}) = \mathbf{false}\colon \mathbf{Bool}}{\Gamma \vdash \mathbf{all}\ M = \mathbf{false}\colon \mathbf{Bool}}\ n \in \mathbb{N}$$

Die Notation in der ersten Regel ist so zu verstehen, dass es abzählbar viele Prämissen gibt: $\Gamma \vdash M\ \mathbf{succ}^0(\mathbf{0}) = \mathbf{true}\colon \mathbf{Bool}$, $\Gamma \vdash M\ \mathbf{succ}^1(\mathbf{0}) = \mathbf{true}\colon \mathbf{Bool}$, ...

Können Sie eine Interpretation für **all** im Standardmodell angeben?

Abgabe: Vor der Vorlesung am 21.7.