7. Juli 2010

Übungen zur Vorlesung

Semantik von Programmiersprachen

Blatt 12

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Assoziativität der Komposition in einer Kleisli-Kategorie.

Aufgabe 2. Definieren Sie in PCF eine Funktion eq: $\mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat} \to \mathbf{Bool}$, die zwei gegebene Zahlen auf Gleichheit testet.

Aufgabe 3. Gegeben seien zwei PCF-Terme

$$f\colon A,\, g\colon B \vdash M\colon A$$
$$f\colon A,\, g\colon B \vdash N\colon B$$

In realen Programmiersprachen (wie z.B. Haskell) kann man mit solchen Termen zwei Werte vom Typ A bzw. B durch wechselseitige Rekursion definieren:

$$f = M$$
$$g = N$$

Geben Sie zwei geschlossene Terme vom Typ A bzw. B in PCF an, welche diesen rekursiv definierten Programmtermen entsprechen.

Aufgabe 4. Beweisen Sie: Sind $\Gamma \vdash M\colon A$ und $\Delta \vdash M\colon B$ herleitbar und weisen Γ und Δ jeder Variable, die frei in M vorkommen, die gleichen Typ zu, so sind die Typen A und B gleich.

Aufgabe 5. Welche der folgenden Observationsäquivalenzen gelten für beliebige M, N und L? Begründen Sie!

$$\mathbf{if}\ M\ \mathbf{then}\ N\ \mathbf{else}\ N =_o^? N \tag{1}$$

$$\mu x\colon \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}.\, x =_o^? \lambda x\colon \mathbf{Nat}.\, \mu x\colon \mathbf{Nat}.\, x \tag{2}$$

$$\mathbf{if}\ M\ \mathbf{then}\ (\lambda x\colon A.\, N)\ \mathbf{else}\ (\lambda x\colon A.\, L) =_o^? \lambda x\colon A.\, \mathbf{if}\ M\ \mathbf{then}\ N\ \mathbf{else}\ L \tag{3}$$

$$\lambda f.\, f\ (\lambda x.\, f\ (\lambda y.\, y)) =_o^? \lambda f.\, f\ (\lambda x.\, f\ (\lambda y.\, x)) \tag{4}$$

Aufgabe 6. Für einen geschlossenen Term M schreiben wir $M \Downarrow$ wenn ein Wert V existiert, so dass $R \Downarrow V$ gilt.

Zeigen Sie, dass $M \sqsubseteq_o N$ genau dann gilt wenn für jeden Kontext $C[X]$, für den $C[M]$ und $C[N]$ geschlossene Terme vom Typ **Bool** oder **Nat** sind, die Implikation $C[M] \Downarrow \implies C[N] \Downarrow$ gilt.

Abgabe: Vor der Vorlesung am 13.7.