27. Mai 2010

Übungen zur Vorlesung

Semantik von Programmiersprachen

Blatt 6

Aufgabe P-1 (Lokal-namenlose Repräsentation von Termen): Geben Sie lokal-namenlose Repräsentationen von folgenden Termen an:

1. $(\lambda y \lambda x.\ y\ (\lambda y\ x))\ (\lambda x\ x)\ (\lambda y.\ y\ y)$
2. $(\lambda x.\, y\, x\, (\lambda y.\, z\, x\, y\, (\lambda z.\, z\, y\, x)))$

Aufgabe P-2 (Syntaxgerichtete Definition der α-Äquivalenz): Wiederholung: $=_\alpha$ ist die kleinste kompatible Äquivalenzrelation über dem Axiomenschema:

$$\textsc{EQ}_\alpha\text{-AX}\ \frac{}{\lambda x t =_\alpha \lambda y.\, t[y/x]}\ y \notin \mathsf{FV}(t)$$

Wir definieren nun $=^\alpha$ als die kleinste Relation, die unter den folgenden Regeln abgeschlossen ist.

$$\textsc{EQ}_\alpha\text{-VAR}\ \frac{}{x =^\alpha x} \qquad \textsc{EQ}_\alpha\text{-APP}\ \frac{r =^\alpha r' \qquad s =^\alpha s'}{r\, s =^\alpha r'\, s'}$$

$$\textsc{EQ}_\alpha\text{-ABS}\ \frac{t[y/x] =^\alpha t'[y/x']}{\lambda x t =^\alpha \lambda x' t'}\ y \notin \mathsf{FV}(t, t')$$

Zu zeigen ist nun, dass die beiden Definitionen der α-Äquivalenz gleichwertig sind.

Zeigen Sie die Korrektheit von $=^\alpha$, also die Aussage $t =^\alpha t' \implies t =_\alpha t'$, durch (Regel-) Induktion über die Herleitung von $t =^\alpha t'$.

Aufgabe P-3 (Eta-Reduktion): Die Eta-Reduktion $\longrightarrow_\eta$ ist die kleinste kompatible Relation über dem Axiomenschema: $\lambda x.\,(t\, x) \longrightarrow_\eta t$ falls $x \notin \mathsf{FV}(t)$. Zeigen Sie, dass $\longrightarrow_\eta$ konfluent ist. (Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass die reflexive Hülle von $\longrightarrow_\eta$ die Diamanteigenschaft besitzt.)

Aufgabe H-1 (Syntaxgerichtete Definition der α-Äquivalenz): Zu zeigen ist, dass die beiden Definitionen der α-Äquivalenz gleichwertig sind.

1. In der Präsenzaufgabe wurde schon die Korrektheit von $=^\alpha$ gezeigt, also die Aussage $t =^\alpha t' \implies t =_\alpha t'$.
2. Zeigen Sie, dass $=^\alpha$ substitutiv ist.

3. Zeigen Sie, dass $=^\alpha$ eine Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch) ist, jeweils durch eine geeignete Induktion.

4. Zeigen Sie schliesslich die Vollständigkeit, also die Aussage $t =_\alpha t' \implies t =^\alpha t'$, durch Induktion über die Herleitung von $t =_\alpha t'$.

Weiterführende Frage: Inwiefern ergibt sich aus $=^\alpha$ ein Algorithmus zur Entscheidung der α-Äquivalenz?

Aufgabe H-2 (Konfluenz und Seiteneffekte): Programmiersprachen mit Seiteneffekten sind nicht konfluent, deswegen ist dort die Auswertungsreihenfolge fest vorgeschrieben.

Betrachten Sie die Sprache L, die den λ-Kalkül um einen 1-Bit-Speicher erweitert, d.h. um Konstanten $0, 1$ (Bit-Werte), get (Lesen des Speichers) und set (Schreiben des Speichers). Die Reduktion $\longrightarrow$ ist eine binäre Relation auf $\{0, 1\} \times L$, induktiv definiert durch die folgenden Regeln:

$$\frac{}{(b, \mathsf{get}) \longrightarrow (b, b)} \qquad \frac{}{(b, \mathsf{set}\,0) \longrightarrow (0, 0)} \qquad \frac{}{(b, \mathsf{set}\,1) \longrightarrow (1, 1)}$$

$$\frac{}{(b, (\lambda xt)\, s) \longrightarrow (b, t[s/x])} \qquad \frac{(b, t) \longrightarrow (b', t')}{(b, \lambda xt) \longrightarrow (b', \lambda xt')}$$

$$\frac{(b, r) \longrightarrow (b', r')}{(b, r\, s) \longrightarrow (b', r'\, s)} \qquad \frac{(b, s) \longrightarrow (b', s')}{(b, r\, s) \longrightarrow (b', r\, s')}$$

Z.B. $(1, \mathsf{set}\,\mathsf{get}) \longrightarrow (1, \mathsf{set}\,1) \longrightarrow (1, 1)$. Zeigen Sie, dass $\longrightarrow$ nicht konfluent ist.

Abgabe: Vor der Vorlesung am 2.6.