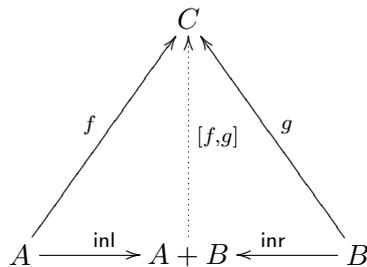


Übungen zur Vorlesung
Semantik von Programmiersprachen
Blatt 10: Kategorien

Aufgabe H-1 (Koprodukt): Das Koprodukt zweier Objekte A und B ist ein Objekt, genannt $A + B$, mit zwei Morphismen $\text{inl} : A \rightarrow A + B$ und $\text{inr} : B \rightarrow A + B$, so dass es für alle C und Morphismen $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ genau einen Morphismus, genannt $[f, g]$, gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert.



Zeigen sie, dass $A + B = \{(0, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, b) \mid b \in B\}$ Koprodukt von A und B in der Kategorie SET der Mengen und totalen Funktionen ist.

Aufgabe H-2 (Koprodukt von Gruppen): Definieren Sie das Produkt $A \times B$ in der Kategorie AB der abelschen Gruppen. Zeigen Sie, dass $A \times B$ auch das Koprodukt von A und B in AB ist.

Aufgabe H-3 (Initiales Objekt): Ein Objekt 0 heisst *initial*, falls es für jedes Objekt A genau einen Morphismus $f : 0 \rightarrow A$ gibt. Dieser Morphismus wird als zero_A bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass die leere Menge in SET initial ist.
2. Zeigen Sie, dass die einelementige Gruppe sowohl initial als auch terminal ist.
3. Sei $\text{MON}(X)$ die Kategorie der Monoide mit Trägermenge X . Zeigen Sie, dass $\text{List}(X)$, die Menge der Listen über X , ein Monoid ist und in $\text{MON}(X)$ initiales Objekt ist. (Man nennt $\text{List}(X)$ auch das *freie Monoid über X* .)

Aufgabe H-4 (Monaden): Eine *Monade* auf einer Kategorie \mathcal{C} ist ein Funktor $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ zusammen mit zwei natürlichen Transformationen $\eta_X: X \rightarrow TX$ (Unit) und $\mu_x: TTX \rightarrow TX$ (Multiplikation), so dass folgende Diagramme für alle X kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 TX & \xrightarrow{\eta_{TX}} & TTX & \xleftarrow{T\eta_X} & TX \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow \mu & \swarrow \text{id} & \\
 & & TX & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 TTX & \xrightarrow{T\mu_{TX}} & TTX \\
 \mu_{TTX} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 TTX & \xrightarrow{\mu_X} & TX
 \end{array}$$

Zeigen Sie:

1. Der Funktor $\text{List} : \text{SET} \rightarrow \text{SET}$ ist eine Monade. (Definieren Sie dazu η und μ geeignet.)
2. In einer CCC \mathcal{C} ist $\text{Reader} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $\text{Reader}(A) = A^S$ eine Monade.

Abgabe: Vor der Vorlesung am 7.7.