

Übungen zur Vorlesung
Semantik von Programmiersprachen
Blatt 10: Kategorien

Aufgabe H-1 (Neutrales Element bzgl. kartesischem Produkt): Sei 1 terminales Objekt in eine Kategorie \mathcal{C} Zeigen Sie: $A \times 1 \cong A$ für alle A .

Aufgabe H-2 (Produktfunktors): Die Kategorie \mathcal{C} habe Produkte. Zeigen Sie, dass $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, gegeben durch $F(A, B) = A \times B$ und $F(f, g) = f \times g$ ein Funktor von der Produktkategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nach \mathcal{C} ist.

Aufgabe H-3 (Punktobjekt): Zeigen Sie: $A^1 \cong A$ gilt in jeder CCC.

Aufgabe H-4 (Eindeutigkeit des Funktionsobjektes): Der Exponent ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Aufgabe H-5 (Natürlichkeit der Anwendung): Sei S ein beliebiges, festes Objekt einer CCC \mathcal{C} . Der Objektteil eines Funktors $\text{Reader} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ sei gegeben durch $\text{Reader}(A) = A^S$. Definieren Sie die Aktion von Reader auf Morphismen $f : A \rightarrow B$ und beweisen Sie die Funktorgesetze.

Definieren Sie nun neue Funktoren $F(A) = \text{Reader}(A) \times S$ und $\text{Id}(A) = A$ und zeigen Sie, dass $\text{apply} : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation ist.

Aufgabe H-6 (CPO ist eine CCC): Zeigen Sie, dass die Kategorie CPO der vollständigen partiellen Ordnungen und stetigen Funktionen kartesisch abgeschlossen ist.

Abgabe: Vor der Vorlesung am 30.6.