# Kapitel 4: Alternierung und Hierarchien

**Definition:** Für eine Menge $C \subseteq 2^{\Sigma^*}$ ist

$$P^C := \bigcup_{A \in C} P^A,$$

$NP^C, PSPACE^C$ analog.

Frage: Was sind $P^{NP}, NP^{NP}$ und Verallgemeinerungen davon?

## Die Polynomielle Hierarchie

$$\Sigma_1^p := NP \qquad\qquad \Pi_1^p := co\text{-}NP$$

induktiv:

$$\Delta_{i+1}^p := P^{\Sigma_i^p}, \qquad\qquad \Sigma_{i+1}^p := NP^{\Sigma_i^p}, \qquad\qquad \Pi_{i+1}^p := co\text{-}NP^{\Sigma_i^p}$$

Vereinigung: $PH := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^p$

**Eigenschaften:**

1. $\Delta_2^p = P^{SAT}, \qquad \Sigma_2^p = NP^{SAT}$
2. analog: ist A vollständig für$\Sigma_i^p$, dann ist
   $\Delta_{i+1}^p = P^A, \qquad \Sigma_{i+1}^p = NP^A$
3. $\Sigma_i^p \cup \Pi_i^p \quad \subseteq \quad \Delta_{i+1}^p \quad \subseteq \quad \Sigma_{i+1}^p \cap \Pi_{i+1}^p$
4. $\Delta_{i+1}^p = P^{\Pi_i^p} \quad und \quad \Sigma_{i+1}^p = NP^{\Pi_i^p}$

Beweis: Übung.

**Nutzen:**

- Für die kleinen Klassen gibt es natürliche, vollständige Probleme, z.B.:

  MINIMUM EQUIVALENT DNF:

  | | |
  |---|---|
  | geg: | DNF-Formel F, $k \in \mathbb{N}$ |
  | Frage: | gibt es DNF-Formel $G \equiv F$ mit h öchstens k Termen, bzw. $\lvert G \rvert \leq k$ ? |

- Kalibrierung von Annahmen, z.B.:

  Graphenisomorphie ist NP-vollständig $\Rightarrow \Sigma_2^p = \Pi_2^p$

**Proposition 1:** PH $\subseteq$ PSPACE
<u>Beweis:</u>

| | | |
|---|---|---|
| $i = 1$ | $\Sigma_1^p = NP \subseteq PSPACE$ | nach Kapitel 3 |
| $i \to i+1:$ | $\Sigma_{i+1}^p = NP^{\Sigma_i^p} \subseteq NP^{PSPACE}$ | nach Induktionshypothese |
| | $\subseteq PSPACE^{PSPACE} = PSPACE$ | da $NP \subseteq PSPACE$ relativiert |

**Charakterisierung** durch Quantoren

**Proposition 2** $A \in \Sigma_i^p$ gdw. es gibt $R_A(x, y_1, \ldots, y_i) \in P$ und Polynom p, mit

$$\forall x \quad x \in A \qquad gdw. \qquad \exists y_1 \forall y_2 \ldots Q y_i \quad |y_i| \leq p(|x|) \quad \wedge \quad R_A(x, y_1, \ldots, y_i),$$

$$Q = \begin{cases} \forall & falls\ i\ gerade, \\ \exists & falls\ i\ ungerade \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> Induktion nach i:

$i = 1:$ ist gerade Proposition 1 aus Kapitel 2
$i \to i+1:$ völlig analog dazu, unter Benutzung von Eigenschaft (4)

Hierarchie-eigenschaft:

**Theorem 3** Falls $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$, so ist $PH = \Sigma_k^p$.
(dazu sagt man PH kollabiert auf Stufe k!)
<u>Beweis:</u> Angenommen $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$. Zeige durch Induktion nach i dass

$$\Sigma_{k+i}^p = \Pi_{k+i}^p = \Sigma_k^p$$

$i = 0:$ offensichtlich.
$i \to i+1:$ Sei $A \in \Sigma_{k+i+1}^p$. Dann gibt es $R_A \in \Pi_{k+i}^p$ mit

$$x \in A \qquad gdw. \qquad \exists y \quad |y| \leq p(|x|) \wedge R_A(x, y)$$

Nach Induktionsannahme ist $R_A \subset \Sigma_k^p$. Also auch $A \in \Sigma_k^p$, und somit $\Sigma_{k+i+1}^p = \Sigma_k^p$.
Da $\Sigma_k^p$ nach Voraussetzung unter Komplementbildung abgeschlossen ist, folgt

$$\Sigma_{k+i+1}^p = \Pi_{k+i+1}^p = \Sigma_k^p$$

## Alternierende Turing-Maschiene (ATM)

Eine ATM ist eine (N)TM $(Q, \sigma, I, q_0, F)$ mit

- Q zerlegt in $Q = Q_\forall \uplus Q_\exists \uplus \{ACC, REJ\}, F = \{ACC, REJ\}$
  (jede Berechnung endet in F)

Induktiv wird definiert, wann ein globaler Zustand $S = (q, b)$ akzeptiert ist:

- Falls $q \in F$: S akzeptiert gdw. $q = ACC$.
- Falls $q \in Q_\exists$: S akzeptiert gdw. es gibt Folgezustand S'mit $S \to S'$, so dass $S'$ akzeptierend.
- Falls $q \in Q_\forall$: S akzeptiert gdw. für alle Folgezustände S' mit $S \to S'$ ist S'akzeptierend.

ATM T akzeptiert Eingabe $x$ falls $S_0(x)$ akzeptierend ist.

**Alternierung** modelliert

- paralleles Rechnen:
  Zustände können als Prozesse, Folgezustände als Kindprozesse interpretiert werden , die u.U. parallel laufen. Ist der dem Vaterprozess entsprechende Zustand aus $Q_\exists$, so terminiert er erfolgreich, falls einer seiner Kindprozesse erfolgreich terminiert. Analog für $Q_\forall$.
- Gewinnstrategie in Spielen:
  Weiss gewinnt gdw. es gibt einen weissen Zug, so dass für alle schwarzen Züge gilt: Weiss gewinnt im Folgezustand.