Übersicht

AP-Reduktion

Definition: P ist AP-reduzierbar auf Q, $P \leq_{AP} Q$, falls es Funktionen f und g und $\alpha \geq 1$ gibt mit:

- für $x \in I_P$ und $1 < r \in \mathbb{Q}$ ist $f(x, r) \in I_Q$,
- ist $S_P(x) \neq \emptyset$, dann ist $S_Q(f(x, r)) \neq \emptyset$,
- für $y \in S_Q(f(x, r))$ ist $g(x, y, r) \in S_P(x)$,
- für alle $r > 1$ sind $\lambda x.f(x, r)$ und $\lambda x, y\,.\,g(x, y, r)$ in FP,
- für alle $y \in S_Q(f(x, r))$ gilt

$$R_Q(f(x, r), y) \leq r \quad \Longrightarrow \quad R_P(x, g(x, y, r)) \leq 1 + \alpha(r - 1)\ .$$

Approximations-algorithmen

Einführung
Grundlagen
Methoden zum Entwurf
Approximationsklassen
Das PCP-Theorem
Reduktion und Vollständigkeit
Beweis des PCP-Theorems

Abschluss unter *AP*-Reduktion

Lemma:

$$Q \in \text{APX} \quad \text{und} \quad P \leq_{AP} Q \quad \Longrightarrow \quad P \in \text{APX}$$
$$Q \in \text{PTAS} \quad \text{und} \quad P \leq_{AP} Q \quad \Longrightarrow \quad P \in \text{PTAS}$$

Beispiele:

Maximum Satisfiability $\leq_{AP}$ Maximum Clique
Maximum Clique $\leq_{AP}$ Maximum Independent Set

Korollar: $\text{P} \neq \text{NP} \Longrightarrow$ Maximum Independent Set $\notin$ APX

L-Reduktion

Definition: P ist L-reduzierbar auf Q, $P \leq_L Q$, falls es Funktionen $f : I_P \to I_Q$ und g in FP und $\beta, \gamma \geq 0$ gibt mit:

- ist $S_P(x) \neq \emptyset$, dann ist $S_Q(f(x)) \neq \emptyset$,
- für $y \in S_Q(f(x))$ ist $g(x, y) \in S_P(x)$,
- für alle $x \in I_P$ ist $m^*_Q(f(x)) \leq \beta m^*_P(x)$
- für alle $y \in S_Q(f(x))$ gilt

$$|m^*_P(x) - m_P(x, g(x, y))| \leq \gamma |m^*_Q(f(x)) - m_Q(f(x), y)| \,.$$

Satz: Ist $P \leq_L Q$ und $P \in \text{APX}$, dann auch $P \leq_{AP} Q$.

Ein NPO-vollständiges Problem

MAXIMUM WEIGHTED SATISFIABILITY:

Instanz:	Aussagenlogische Formel φ in Variablen $x_1, \ldots x_n$, für jede Variable x_i Gewicht $w_i \geq 0$
Lösung:	Bewertung α mit $\alpha \models \varphi$
Maß:	$\max(1, \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha(x_i))$

Satz: MAXIMUM WEIGHTED SATISFIABILITY ist vollständig für die Klasse NPO.

APX-Vollständigkeit

Satz: Für jedes Maximierungsproblem P in APX:

$P \leq_{AP}$ MAXIMUM 3-SATISFIABILITY

Satz: Für jedes Minimierungsproblem P in APX gibt es ein Maximierungsproblem $P' \in$ APX mit $P \leq_{AP} P'$.

Korollar: MAXIMUM 3-SATISFIABILITY ist APX-vollständig.

Mehr APX-vollständige Probleme

Lemma:

1. Maximum 3-Satisfiability $\leq_L$ Maximum 2-Satisfiability
2. Maximum 2-Satisfiability $\leq_L$ Maximum Not-All-Equal 3-Satisfiability
3. Maximum Not-All-Equal 3-Satisfiability $\leq_L$ Maximum Cut

Ausserdem: Maximum Not-All-Equal 3-Satisfiability $\in$ APX

Korollar: Maximum 2-Satisfiability, Maximum Not-All-Equal 3-Satisfiability und Maximum Cut sind APX-vollständig.

Eingeschränkte Erfüllbarkeitsprobleme:

Maximum 3-Satisfiability(b): Einschränkung von Maximum 3-Satisfiability auf Instanzen, in denen jede Variable höchstens b mal vorkommt.

Lemma:
Maximum 3-Satisfiability $\leq_L$ Maximum 3-Satisfiability(29)
Maximum 3-Satisfiability(29) $\leq_L$ Maximum 3-Satisfiability(5) (Übung)
Maximum 3-Satisfiability(5) $\leq_L$ Maximum 3-Satisfiability(3)

Satz: Maximum 3-Satisfiability(3) ist APX-vollständig.