

George Boole: Boolesche Algebra und Aussagenlogik

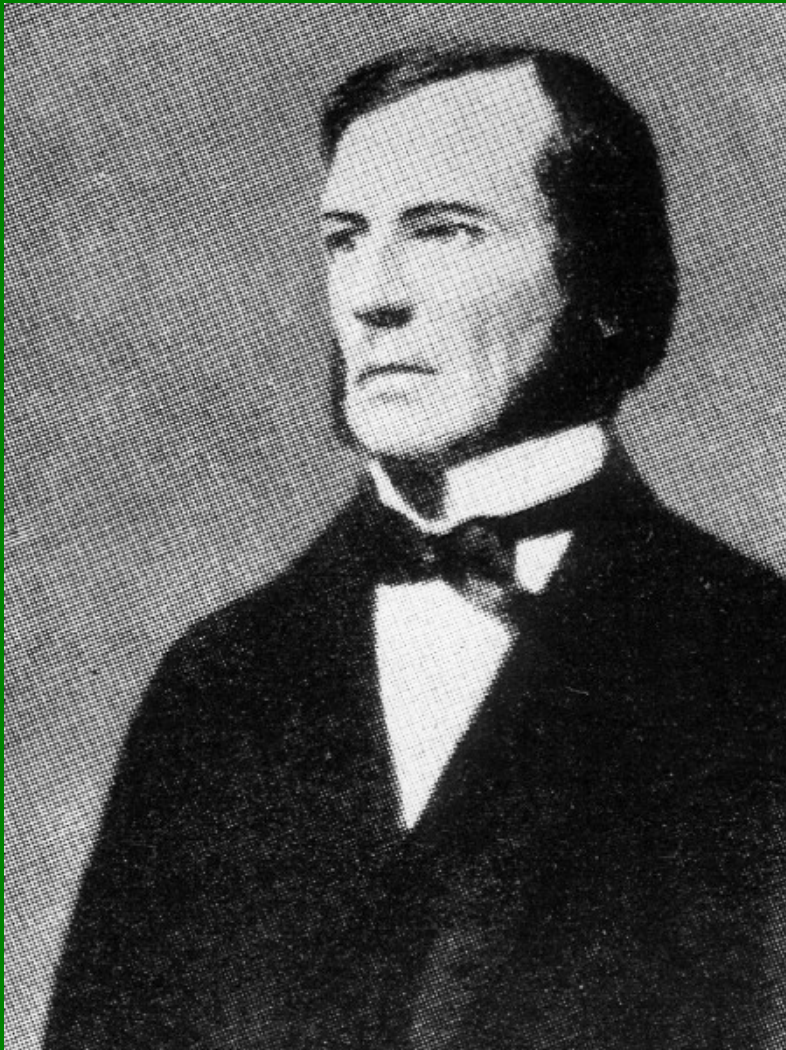
Peter Schiff

22.12.2009

Gliederung

- Booles Leben
 - Booles Jugend
 - Erste Lehrversuche
 - Booles eigene Schule
- Aussagenlogik
- Boolesche Algebra

Booles Jugend



- 2.11.1815: George Boole wird in Lincoln geboren
- Wunschkind mittelständischer Eltern
- Vater äußerst wissenschaftlich interessiert aber vernachlässigt sein Schuhgeschäft
- Beginnt schon in jungen Jahren Wissen aus Büchern anzuhäufen

Booles Jugend

- Beschäftigt sich bereits mit 7 Jahren mit Mathematik
- Technisches Interesse des Vaters beeinflusst ihn und bringt ihm so die praktische Mathematik näher

Booles Jugend

- Studium der klassischen Sprachen mit 10
- Mit 14 erste „Publikation“ in einer Zeitung, die sofort einen Streit auslöst
- Nach Abschluss der Grundschule vorerst keine weitere Bildungschancen
- Wunsch Pfarrer zu werden kommt auf
- Pleite des Vaters zwingt Boole mit 16 als „Assistant Teacher“ zu arbeiten

George Booles erste Lehrversuche

- Glaubenskonflikte erschweren seine Arbeit:
 - Er selbst ist „Unitarian“
 - Eltern der Schüler sind Methodisten
 - Hält Mathematikvorlesungen an Sonntagen
 - Löste mathematische Probleme in der Kirche
- Boole gilt als schlechter Lehrer:
 - Keine Geduld mit schlechten Schülern
 - Mehr interessiert am eigenen Studium als an dem der Schüler

Erste Lehrversuche

- 1831: Beginn des Mathematikstudiums als Autodidakt
- Nach dem beherrschen der Grundlagen wendet er sich der „natural philosophy“ zu. (Entspricht der angewandten Mathematik heutzutage)
- Setzt sich mit Lacrois „Differential and Integral Calculus“ auseinander
- Selbststudium lässt ihn die Aussagen tiefer verstehen

Erste Lehrversuche

- 1833 Kündigung nach 2 Jahren aufgrund der Konflikte mit den Eltern sowie die schlechte Lehrleistung
- Beginnt im selben Jahr mit Ideen zu formulieren, wie man Logische Sachverhalte algebraisch darstellen kann

Booles eigene Schule

- Ebenfalls 1833: neue Lehrstelle in Liverpool bei Mr. Marrat
- In der zweiten Hälfte des Jahres nimmt er jedoch eine Lehrstelle in Waddington an da diese näher an seiner Heimat liegt
- 1834: Eröffnung einer eigenen Schule in Lincoln

Booles eigene Schule

- Job als „Schoolmaster“ (Rektor) erlaubt ihm viel Zeit für sein eigenes Studium
- Kontakt zur mathematischen Basis vertieft sein Verständnis
- Eigener Lehrstil, weniger abstrakt und vielmehr praktisch anwendbare Mathematik wird vermittelt
- Versucht sein ausgewogenes Wissen an die Schüler weiterzugeben

Booles eigene Schule

- Da Boole ein junger Lehrer war viel ihm der Umgang mit den Schülern leicht und somit steigt seine Beliebtheit
- Eigene Schule läuft äußerst erfolgreich

Booles eigene Schule

- 1838: Tod von Robert Hall
- Boole übernimmt seine Schule in Waddington
- Studiert zur Zeit die Werke von Laplace und Lagrange
- Duncan Gregory ermutigt ihn in Cambridge zu studieren
- Boole ist interessiert jedoch benötigt er ein Einkommen um seine Familie versorgen zu können

Booles eigene Schule

- 1840: Boole eröffnet in Lincoln ein Internat
- Beginnt in der „Cambridge Mathematical Journal“ zu publizieren
- 1842: Beginn der Freundschaft mit DeMorgan
- Er schickt ihm „On a general method of analysis“ damit dieser es bewerten kann
- 1844 publiziert er es in der „Transactions of the Royal Society“ und erhält dafür die „Society's Royal Medal“

Zeit als Professor

- 1846 hat sich Booles finanzielle Situation verbessert sich
- Er investiert mehr Zeit in sein eigenes Studium
- Und beschließt sich für einen Professor platz an den neuen „Queen's Colleges of Ireland“ zu bewerben
- 1848: Booles Vater stirbt
- Stelle als Professor wird umso wichtiger da sie weitere finanzielle Unabhängigkeit bedeuten würde

Zeit als Professor

- 1847 nimmt Boole seine alten Ideen zur Logik wieder auf
- Inspiriert durch einen Streit von DeMorgan und Sir William Hamilton
- Alle Objekte einer Klasse sollen als ein Symbol dargestellt werden
- Relation zwischen den Klassen sollen algebraischen Relationen ähneln

Zeit als Professor

- Im selben Jahr noch veröffentlicht er „Mathematical Analysis of Logic“
- Aufgrund der Geschwindigkeit der Publikation jedoch einige Ungenauigkeiten
- Jedoch trotzdem der Beginn der symbolischen Logik
- Klassische Logik wird zum Teilbereich der Mathematik

Zeit als Professor

- 1848: Booles Vater stirbt
- Stelle als Professor wird umso wichtiger da sie weitere finanzielle Unabhängigkeit bedeuten würde

Zeit als Professor

- August 1849: Boole wird erster Mathematik Professor im „Queen's College, Cork“
- Behält diese Stelle für den Rest seines Lebens
- Baute sich einen Ruf als außerordentlich guter und engagierter Professor auf
- Jedoch überschatteten Religiöse Konflikte seine Lehrzeit

Zeit als Professor

- So schrieb er an seinen Freund DeMorgan:

„...if you should hear of any situation in England that would blikely to suit me ... let me know of it. I am not terrified by the storm of religious bigotry which is at this moment raging round us here. I am not dissatisfied with my duties and I may venture to say that I am on good terms with my colleagues and with my pupils. But I cannot help entertaining a feeling ... that recent events in this College have laid the foundation of a lack of mutual trust and confidence among us ...“

Zeit als Professor

- 1851 wurde Boole zum „Dean of Science“ gewählt
- Amt führt er äußerst gewissenhaft aus
- Nach seiner Amtszeit erscheint er nichtmehr auf Fakultätstreffen
- Selbst in seiner 2ten Amtszeit als Dean (1862-63) kommt es kaum zu bemerkenswerten Ereignissen

Zeit als Professor

- 1850 Traf er May Everest (Nichte von Sir George Everest) seine spätere Frau
- 1852-55 hält er mit May Kontakt, der sich jedoch auf mathematischen Austausch beschränkt
- 1855 stirbt ihr Vater
- Boole will sie heiraten hat jedoch zweifel Aufgrund des Altersunterschied
- 11.9.1855: Hochzeit mit May
- Ehe verläuft erstaunlich gut

Zeit als Professor

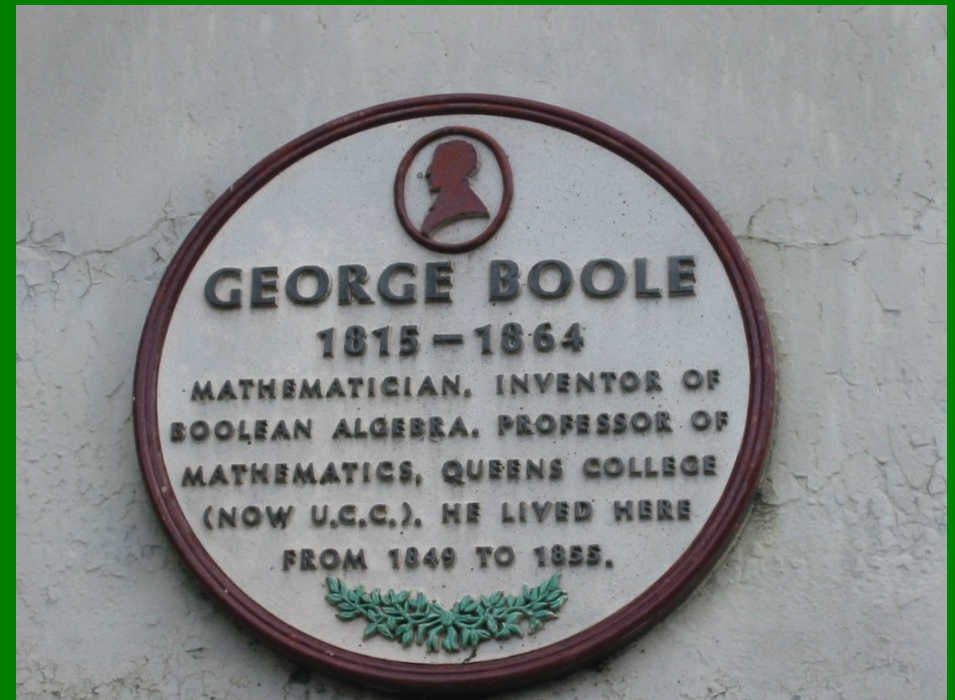
- 1854 verbessert Boole sein Logisches Kalkül
- Er veröffentlicht im selben Jahr
„An Investigation of the Laws of Thought on
Which are Founded the Mathematical Theories
of Logic and Probabilities“
- Doch auch mit dieser verbesserten Version
seines Logikkalküls ist er nicht zufrieden und
beginnt an den Arbeiten eines dritten Buchs
- Wird jedoch nie veröffentlicht

Letzte Jahre

- Übermäßiger Stress:
 - Beginnt Gedichte zu schreiben
 - Veröffentlicht weiterhin Mathematische Werke
 - Hat die meisten Studenten, jedoch keinerlei Assistenten
- Gesundheitliche Situation verschlimmert sich
- Seine Frau versucht mit homeopatischen Mittel zu helfen, wirkt jedoch kaum

Letzte Jahre

- Am Abend des 8.12.1864 verstirbt George Boole
- Zeitungen berichten, dass die Todesursache eine Lungenentzündung oder Fieber war



Aussagenlogik

- Definition
- Historisches
- Abgrenzung von der klassischen Logik
- Motivation

Definition

- Teilbereich der Logik
- Befasst sich mit Aussagen und Verknüpfungen von Aussagen durch Junktoren
- Grundlage sind Elementaraussagen denen Wahrheitswerte zugewiesen werden

Definition

- Elementaraussagen z.b.:
 - A1: 9 ist durch 3 Teilbar
 - A2: 6 ist eine Primzahl
- Negation:
 - $\neg A1$: 9 ist nicht durch 3 Teilbar
 - $\neg A2$: 6 ist keine Primzahl

Junktoren

- Konjunktion:
 - Logisches und
 - $C1 = A1 \wedge A2$
 - C1 nur wahr falls A1 und A2 wahr
- Disjunktion:
 - Nichtausschließendes Oder
 - $C1 = A1 \vee A2$
 - C1 wahr falls A1 oder A2 oder beide wahr

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \wedge B$
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \vee B$
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	falsch	falsch

Junktoren

- Materielle Implikation
 - $A \rightarrow B$
 - A setzt voraus dass B
- Bikonditional
 - $A \leftrightarrow B$
 - Materielle Äquivalenz

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B \rightarrow \neg A$
falsch	falsch	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr	wahr

Junktoren

- Ausschließendes Oder:
 - XOR in Schaltalgebra
 - $C = \neg(A \leftrightarrow B)$

A	B	$\neg(A \leftrightarrow B)$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	falsch

Verneinung einer Verknüpften Aussage

- Verneinung einer Konjunktion
 - NAND in der Schaltalgebra
 - $\neg(A \wedge B)$
- Verneinung einer Disjunktion
 - NOR in der Schaltalgebra
 - $\neg(A \vee B)$

A	B	$\neg(A \wedge B)$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	falsch

A	B	$\neg(A \vee B)$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	falsch

Historisches

- Erste Diskussion von aussagenlogischen Grundsätzen durch Aristoteles
- Antike und Mittelalter hindurch Versuch der Formalisierung
- Erste vollständige und entscheidbare Formalisierung für aussagenlogische Tautologien von George Boole 1847

Abgrenzung von der klassischen Logik

- Klassische Logik besitzt nur 2 Wahrheitswerte
- Aussagen sind immer Elementaraussagen
- Verknüpfung von Aussagen nicht wie in der Aussagenlogik möglich

Motivation

- Formalisierung von Aussagen
- Vermeidung von Paradoxen
- Aussagen nach logischen Regeln analysieren

Boolesche Algebra

- Definition
- Beispiel
- Geschichtliches



Definition

- Algebraische Struktur, die logische Operationen verallgemeinert
- Operatoren sind: \vee \wedge \neg
- Eine boolesche Algebra ist ein distributiver komplementärer Verband

Definition

- Kommutativgesetz: $A \vee B = B \vee A$ | $A \wedge B = B \wedge A$

- Assoziativgesetz:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) \quad | \quad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

- Idempotenzgesetz: $A \vee A = A$ | $A \wedge A = A$

- Distributivgesetz:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad | \quad A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Definition

- Neutralitätsgesetz: $A \wedge 1 = A \mid A \vee 0 = A$
- Extremalgesetz: $A \wedge 0 = 0 \mid A \vee 1 = 1$
- Doppelnegationsgesetz: $\neg(\neg A) = A$
- DeMorgansches Gesetz:
 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \mid \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
- Komplementärgesetz:
 $\neg A \wedge A = 0 \mid \neg A \vee A = 1$

Definition

- Dualitätsgesetze: $\neg 1=0$ | $\neg 0=1$
- Absorptionsgesetze: $A \vee (A \wedge B)=A$ | $A \wedge (A \vee B)=A$

Beispiel

- Wichtigste Boolesche Algebra besitzt nur 2 Elemente: 0 und 1
- Verknüpfungen wie folgt definiert:

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

	\neg
0	1
1	0

Beispiel

- Findet Anwendung in Aussagenlogik und Schaltalgebra
- Typische Boolesche Algebra
- Wird ebenfalls verwendet um allgemeine Theorien über Boolesche Algebren aufzustellen

Geschichtliches

- Geht zurück auf George Booles Logikkalkül
- Verallgemeinert von nachfolgenden Mathematikern