

Lösungsvorschlag zur Übung 2 zur Vorlesung  
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Wenn Sie Automaten angeben, tun Sie dies immer in Form eines Zustandsgraphen. Andere Formen der Darstellung (z.B. als Liste von Übergängen) werden nicht gewertet, da sie sehr viel aufwändiger zu korrigieren sind. Vergessen Sie nicht, im Zustandsgraph Start- und Endzustände zu markieren.

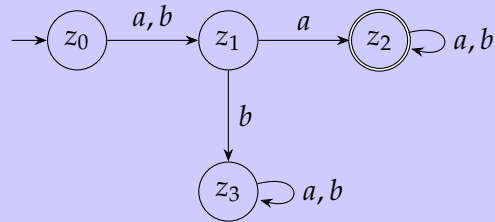
TIMI2-1 DFAs und Minimierung

(2 Punkte)

- a) Geben Sie DFAs an, die folgende Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  erkennen:

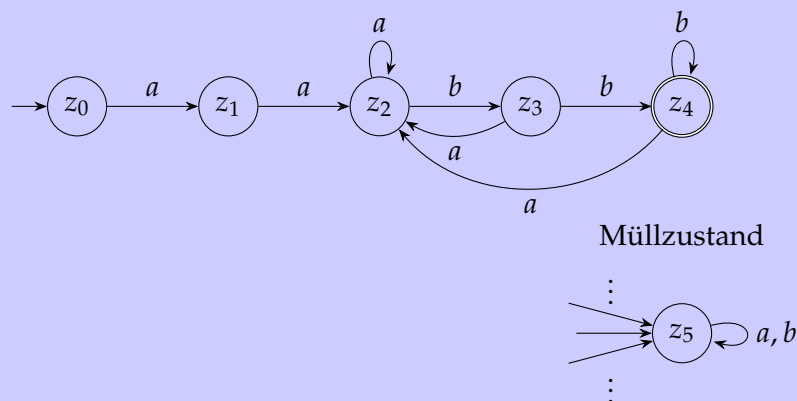
i)  $L_1 = \{caw \mid c \in \Sigma, w \in \Sigma^*\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:



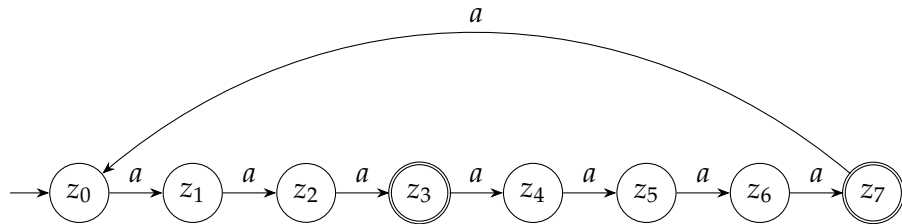
ii)  $L_2 = \{aawbb \mid w \in \Sigma^*\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:



b) Minimieren Sie die folgenden DFAs. Verwenden Sie die tabellarische Variante des Algorithmus zur Minimierung von DFAs aus der Vorlesung (nicht die graphische Variante und nicht den Algorithmus von letztem Jahr!). Geben Sie die Partitionstabelle und den minimalen DFA an. (Das ermöglicht uns, Ihnen bei kleinen Fehlern noch Teilpunkte zu geben.)

i) DFA  $A_1$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a\}$ :

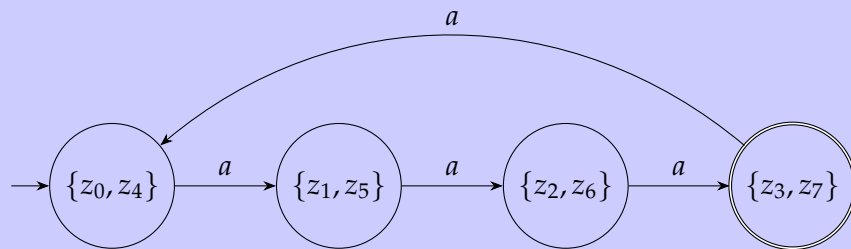


**LÖSUNGSVORSCHLAG:**

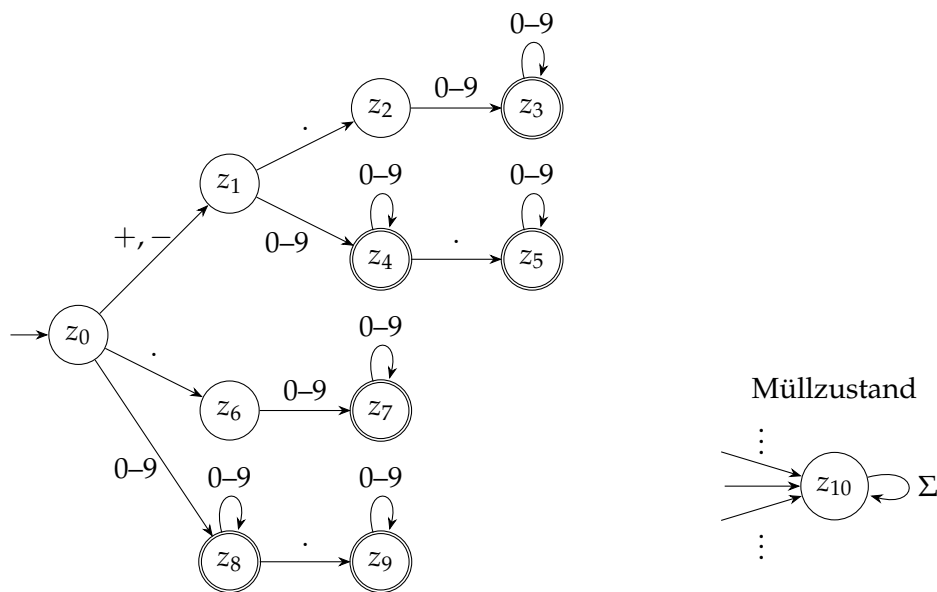
Partitionstabelle:

$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_3$	$z_7$	
$z_0$	$z_1$	$z_4$	$z_5$	$z_2$	$z_6$	$z_3$	$z_7$	mit $a$
$z_0$	$z_4$	$z_1$	$z_5$	$z_2$	$z_6$	$z_3$	$z_7$	mit $a$

Aus der Partitionierung ergibt sich der Minimalautomat:



ii) DFA  $A_2$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$  (bekannt aus der Vorlesung):



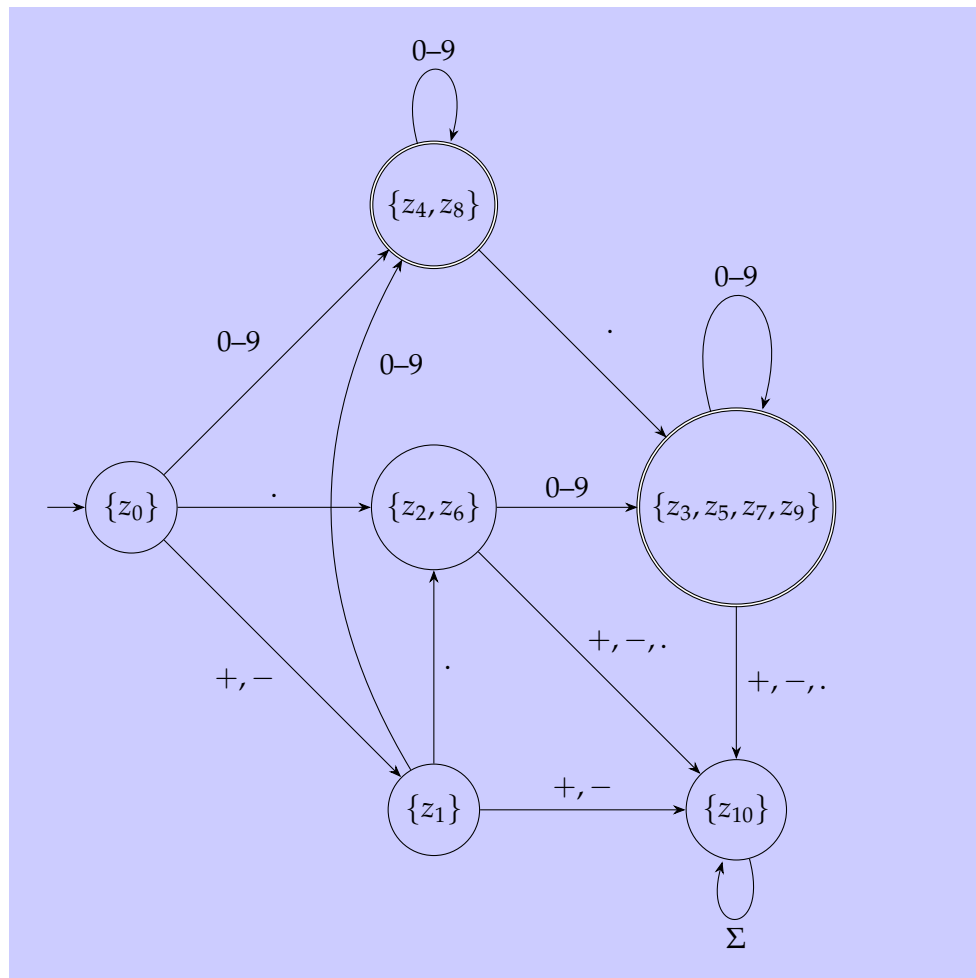
### LÖSUNGSVORSCHLAG:

Partitionstabelle:

$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_6$	$z_{10}$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	
$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_6$	$z_{10}$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	mit 0
$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_6$	$z_{10}$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_7$	$z_8$	$z_9$	mit +
$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_6$	$z_{10}$	$z_3$	$z_5$	$z_7$	$z_9$	$z_4$	$z_8$	mit .

Sie dürfen (und sollten vernünftigerweise) Mengen von Symbolen, die immer zusammen vorkommen, für diesen Algorithmus als ein Symbol betrachten. Beispielsweise müssen Sie bei dem gegebenen Automaten nicht separat prüfen, ob 0, 1, 2, ..., 9 zu einer Partitionierung führen; es genügt, ein Symbol aus dieser Menge zu prüfen.

Aus der Partitionierung ergibt sich der Minimalautomat:



### TIMI2-2 Kleine Automaten

(0 Punkte)

- a) Sei  $A_1$  ein DFA mit Alphabet  $\Sigma$  und genau einem Zustand. Zeigen oder widerlegen Sie: Es ist entweder  $L(A_1) = \Sigma^*$  oder  $L(A_1) = \emptyset$ .

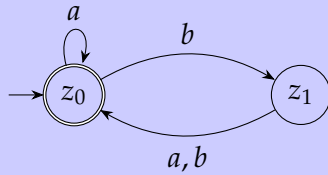
#### LÖSUNGSVORSCHLAG:

Stimmt. Der Automat hat genau einen Zustand  $z_0$  (der also auch Startzustand ist) und muss Übergänge  $z_0 \xrightarrow{a} z_0$  für jedes  $a \in \Sigma$  haben. Wenn  $z_0$  ein Endzustand ist, akzeptiert  $A_1$  somit jedes Wort in  $\Sigma^*$ . Wenn  $z_0$  kein Endzustand ist, akzeptiert  $A_1$  kein Wort.

- b) Sei  $A_2$  ein DFA mit Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  und genau zwei Zuständen. Angenommen es gibt ein Wort  $z \notin L(A_2)$  und für alle  $i \in \mathbb{N}$  ist  $a^i \in L(A_2)$ . Zeigen oder widerlegen Sie: Für jeden solchen Automaten  $A_2$  ist  $bb \notin L(A_2)$ .

### LÖSUNGSVORSCHLAG:

Falsch. Beispielsweise gilt es in folgendem Automaten nicht:



- c) Zeigen Sie: Für jeden DFA  $A$  mit Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  und genau vier Zuständen gilt: Wenn für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  das Wort  $a^{n^2} \in L(A)$  ist, dann ist auch  $a^{12} \in L(A)$ .

### LÖSUNGSVORSCHLAG:

In  $A$  muss es mindestens eine Schleife aus  $a$ -Übergängen geben, da  $A$  beliebig lange  $a$ -Sequenzen erkennt, aber nur 4 Zustände hat.

Sei  $z_0$  der Startzustand von  $A$ . Sei  $z_w = \tilde{\delta}(z_0, a^{12})$  der Zustand, in dem wir uns nach Lesen von  $a^{12}$  befinden. Dieser Zustand  $z_w$  muss Teil einer Schleife sein, da  $A$  nur 4 Zustände hat. Sei  $s \in \{1, 2, 3, 4\}$  die Länge dieser Schleife. Es gilt somit für jedes  $k \in \mathbb{N}$ :  $\tilde{\delta}(z_w, a^{ks}) = z_w$ .

Wir zeigen, dass  $z_w$  ein Endzustand ist. Fallunterscheidung über  $s$ :

- Für  $s = 1$  gilt  $\tilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \tilde{\delta}(z_0, a^{12+4}) = \tilde{\delta}(z_w, a^{4 \cdot 1}) = z_w$
- Für  $s = 2$  gilt  $\tilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \tilde{\delta}(z_0, a^{12+4}) = \tilde{\delta}(z_w, a^{2 \cdot 2}) = z_w$
- Für  $s = 3$  gilt  $\tilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \tilde{\delta}(z_0, a^{12+24}) = \tilde{\delta}(z_w, a^{8 \cdot 3}) = z_w$
- Für  $s = 4$  gilt  $\tilde{\delta}(z_0, a^{4^2}) = \tilde{\delta}(z_0, a^{12+4}) = \tilde{\delta}(z_w, a^{1 \cdot 4}) = z_w$

In allen Fällen gibt es also ein  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $\tilde{\delta}(z_0, a^{n^2}) = z_w$ , sodass  $z_w$  ein Endzustand sein muss. Damit ist  $a^{12} \in L(A)$ . (Übrigens ist 12 die kleinste Nicht-Quadratzahl mit dieser Eigenschaft.)