

**Aufgabe 11-4.**

Abkürzungen:  $\tau$  steht für  $\text{int} \rightarrow \text{int}$  und  $\Gamma$  steht für  $[f \mapsto (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau, x \mapsto (\tau \rightarrow \tau)]$ .

$$\frac{\text{(Var)} \frac{\Gamma(x) = \tau \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash x : \tau \rightarrow \tau} \quad \text{(App)} \frac{\text{(Var)} \frac{\Gamma(f) = (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash f : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau} \quad \text{(Var)} \frac{\Gamma(x) = \tau \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash x : \tau \rightarrow \tau}}{\Gamma \vdash f x : \tau}}{\text{(Fun)} \frac{\Gamma \vdash x (f x) : \tau}{\vdash (\text{fun } f x \Rightarrow x (f x)) : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau}}$$

Abkürzung:  $\Gamma$  steht für  $[f \mapsto (\text{int} \rightarrow \text{int}), x \mapsto \text{int}]$ .

$$\frac{\text{(Var)} \frac{\Gamma(x) = \text{int}}{\Gamma \vdash x : \text{int}} \quad \text{(Const)} \frac{}{\Gamma \vdash 0 : \text{int}} \quad \text{(Const)} \frac{}{\Gamma \vdash 1 : \text{int}} \quad \text{(Var)} \frac{\Gamma(f) = \text{int} \rightarrow \text{int}}{\Gamma \vdash f : \text{int} \rightarrow \text{int}} \quad \text{(App)} \frac{\text{(Var)} \frac{\Gamma(f) = \text{int} \rightarrow \text{int}}{\Gamma \vdash f : \text{int} \rightarrow \text{int}} \quad \text{(Op)} \frac{\text{(Var)} \frac{\Gamma(x) = \text{int}}{\Gamma \vdash x : \text{int}} \quad \text{(Const)} \frac{}{\Gamma \vdash 1 : \text{int}}}{\Gamma \vdash x - 1 : \text{int}}}{\Gamma \vdash f (x - 1) : \text{int}}}{\text{(If)} \frac{\Gamma \vdash x = 0 : \text{bool} \quad \Gamma \vdash \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)) : \text{int}}{\Gamma \vdash \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)) : \text{int}}}}{\text{(Fn)} \frac{[f \mapsto (\text{int} \rightarrow \text{int})] \vdash \text{fn } x \Rightarrow \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)) : \text{int} \rightarrow \text{int}}{\vdash \text{fn } f \Rightarrow \text{fn } x \Rightarrow \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f (x - 1)) : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int})}}$$