Prof. Martin Hofmann
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
22. Juli 2011

Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 12

Aufgabe 12-1. Wie kann man für eine Sprache L jeweils beweisen, dass gilt:

a) $L \in \mathbf{P}$?

b) $L \in \mathbf{NP}$?

c) L ist **NP**-schwer?

d) L ist **NP**-vollständig?

Aufgabe 12-2. Das Problem *3-Färbbarkeit* besteht darin, die Knoten eines gegebenen Graphen mit drei Farben so einzufärben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben. Das heißt, gegeben ist ein Graph und jedem seiner Knoten soll eine von drei Farben zugewiesen werden, so dass es keine Knoten gibt, die durch eine Kante verbunden sind und die die gleiche Farbe haben. Zeigen Sie: Das Problem *3-Färbbarkeit* ist in **NP**.

Aufgabe 12-3. Zeigen Sie: Die Sprache K, die durch das spezielle Halteproblem gegeben ist, ist **NP**-schwer. Ist K auch **NP**-vollständig?

Aufgabe 12-4. Das Problem PARTITION ist folgendermaßen definiert. Gegeben ist eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von natürlichen Zahlen. Gefragt ist, ob es eine Menge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ gibt, so dass $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$ gilt.

Überzeugen Sie sich, dass die Abbildung $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1 + a_2 + \cdots + a_k - b + 1, b + 1)$ eine Reduktion RUCKSACK $\leq_p$ PARTITION vermittelt und damit, dass PARTITION **NP**-schwer ist.

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 12-5. Gegeben seien reguläre Ausdrücke $r = a^*b(a+b)^*$ und $s = (a+b)^*bb$. Geben Sie für die Sprache $L = L(r) \cap L(s)$ einen DEA, einen NEA, einen regulären Ausdruck sowie eine Typ-3 Grammatik an.

Aufgabe 12-6. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $n \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass es einen NEA mit $n + 2$ Zuständen für die Sprache $L = \Sigma^* 0 \Sigma^n$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass jeder DEA mit Sprache L mindestens 2^n Zustände haben muss.

Hinweis: Betrachten Sie die Äquivalenzklassen der Myhill-Nerode-Relation R_L und zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen von $000\ldots000$, $000\ldots001$, $000\ldots010$, $000\ldots011$, usw. bis $111\ldots111$ paarweise verschieden sind.

Aufgabe 12-7. Sei $L = \{a^m b^n a^n \mid m \geq 1, n \geq 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass L kontextfrei ist.

b) Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

   Hinweis: Betrachten Sie Wörter der Form $ab^n a^n$. Es ist wichtig, dass man im Pumping-Lemma auch 0 mal pumpen darf, d.h. dass uv^0w auch immer in L ist.

c) Zeigen Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 12-8. Was ist der höchste Chomsky-Typ der Sprache $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 0\}$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 12-9. Jedes LOOP-Programm kann in ein WHILE-Programm übersetzt werden, in dem die LOOP-Schleife nicht vorkommt. Geben Sie die Übersetzung konkret an, d.h. erklären Sie, wie man die LOOP-Schleife durch eine WHILE-Schleife implementieren kann.

Aufgabe 12-10. Zeigen Sie: Sind zwei Sprachen A und B semientscheidbar, so gilt dies auch für ihren Durchschnitt $A \cap B$.