Prof. Martin Hofmann
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
2. Mai 2011

Formale Sprachen und Komplexität

Blatt 0
(Allgemeine Übungen)

Aufgabe 0-1 (Logik).

1. Entscheiden Sie für jede der folgenden Formeln, ob sie allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar ist.
   (a) $(A \to B \to C) \leftrightarrow A \land B \to C$
   (b) $A \land B \to C$
   (c) $(A \land B \to C) \leftrightarrow \neg(A \land B) \lor \neg C$
   (d) $(\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land \neg(A \to C)$
   (e) $(A \to B) \to (B \to A)$
   (f) $((A \to B) \to A) \to A$
   (g) $((A \to B) \land \neg B) \to \neg A$
2. Drücken Sie die Negation der folgenden Aussagen sowohl natürlichsprachlich als auch als prädikatenlogische Formeln aus.
   (a) Es gibt keine größte gerade Zahl.
   (b) Es gibt keine kleinste positive rationale Zahl.
   (c) Für alle x existiert genau ein y, so dass xRy gilt.
3. Drücken Sie die Kontraposition der folgenden Aussagen aus.
   (a) Gilt $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in S$, so gilt auch $(x, z) \in RS$.
   (b) Ist eine Zahl ungerade, so gibt es eine größere Zahl, die gerade ist.
4. Beweisen Sie folgende Gleichungen für beliebige Mengen X, Y, Z und X_i für $i \geq 0$:
   (a) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
   (b) $X \cup Y = \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}$ (hierbei bezeichnet $\overline{Z}$ das Komplement der Menge Z)
   (c) $\overline{X} \cup Y = \{x \mid x \in X \to x \in Y\}$
   (d) $\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{X_i}$

Aufgabe 0-2 (Äquivalenzrelationen)

1. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?

   (a) Die üblichen Relationen $<$, $\leq$ und $=$ auf natürlichen Zahlen.

   (b) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $R = \{(m, n) \mid m \text{ teilt } n\}$.

   (c) $S_k \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $S_k = \{(m, n) \mid m = n \mod k\}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

   (d) $T \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ mit $T = \{((m, n), (m', n')) \mid m + n' = m' + n\}$.

2. Beschreiben Sie für jede Äquivalenzrelation aus dem vorangegangen Punkt die Faktormenge, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation.

3. Die Verkettung RS zweier Relationen R und S ist definiert durch $RS = \{(x, z) \mid \exists y.\, xRy \wedge ySz\}$. Zeigen Sie: Für jede Äquivalenzrelation gilt $R = RR$.

Aufgabe 0-3 (Beweis durch Induktion) Beweisen Sie folgende Aussage rigoros durch vollständige Induktion. Für jede endliche Menge M gibt es genau $3^{|M|}$ Paare (M_1, M_2) von disjunkten Mengen $M_1 \subseteq M$ und $M_2 \subseteq M$. Hierbei bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

Aufgabe 0-4 (Beweis durch Widerspruch) Sei $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Wir schreiben $O(g)$ für die Menge aller Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die es Zahlen $c \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$. Beweisen Sie rigoros durch Widerspruch, dass $f \in O(g)$ für die Funktionen $f(n) = n^2$ und $g(n) = n$ *nicht* gilt.